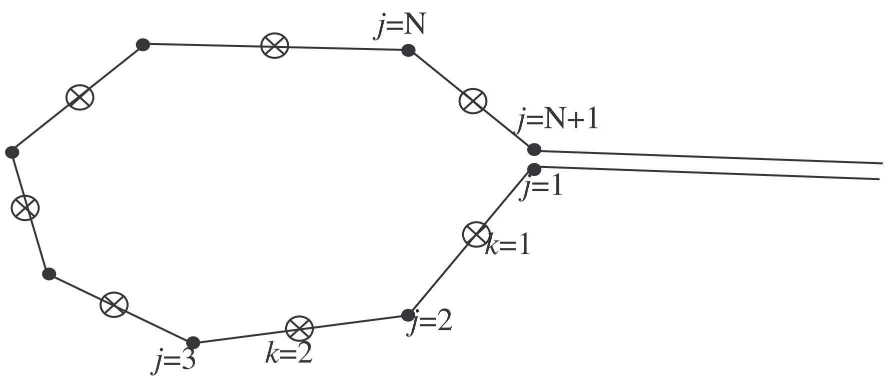
METODO DE PANELES PARA POTENCIAL CONSTANTE (2D)

Ana Laverón y Mª Victoria Lapuerta

En este método se emplea la resolución tipo Dirichlet y para el potencial interior se toma $\Phi_i = 0$, luego no hay distribución de manantiales, sólo dobletes, con lo que la fórmula de Green queda:

$$\Phi_P = -\int_{S_B} \Phi(\nabla\Phi_m \cdot \bar{N})\,\mathrm{d}\,S - \Gamma \int_{S_W} (\nabla\Phi_m \cdot \bar{N})\,\mathrm{d}\,S + \Phi_\infty \qquad (1)$$

donde se ha tenido en cuenta que en 2D es $\Gamma = \Phi^+ - \Phi^-$. Para discretizar esta ecuación se aproxima el perfil por *N* paneles y en cada panel se supone que la intensidad de los dobletes, es decir el potencial Φ, es constante. Las incógnitas del problema son el valor del potencial en cada panel y las ecuaciones que hay que resolver se obtienen particularizando la fórmula de Green, Eq. (1), en *N* puntos de control.



Como puntos de control se toman los puntos medios de cada panel. Así, si la posición de los nodos es (x_j,z_j), la de los puntos de control será:

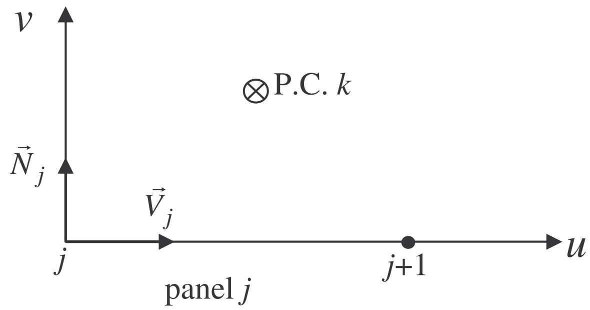
$$x_{PCj} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2} \quad , \quad z_{PCj} = \frac{z_j + z_{j+1}}{2}$$

La fórmula de Green particularizada en los puntos de control queda;

$$\Phi_k = U_\infty (x_{PCk}\cos\alpha + z_{PCk}\sin\alpha) - \sum_{j=1}^{N} \frac{\Phi_j}{2\pi} \int_{\text{panel j}} \frac{(\bar{x}-\bar{x}_{PCk})\cdot \bar{N}\,\mathrm{d}S}{\left|\bar{x}-\bar{x}_{PCk}\right|^2} - \frac{\Phi_N - \Phi_1}{2\pi} \int_{S_W} \frac{(\bar{x}-\bar{x}_{PCk})\cdot \bar{N}\,\mathrm{d}S}{\left|\bar{x}-\bar{x}_{PCk}\right|^2}$$

(2)

Para resolver esas integrales se emplea un sistema de referencia para cada panel:



$$\vec{V}_j = \frac{\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j}{l_j} \quad , \quad l_j = \text{longitud del panel}$$

$$\vec{V}_j = (V_{jx}, V_{jz}) \quad , \quad \vec{N}_j = (-V_{jz}, V_{jx})$$

Tal y como se ha definido la numeración de los paneles (en sentido horario), el vector $\vec{N}_j$ (perpendicular a $\vec{V}_j$ y formando un sistema orientado a derechas) siempre apunta hacia el exterior del cuerpo, es decir, $\vec{N}_j = \bar{N}$.

Las coordenadas del punto de control *k* en el sistema de referencia del panel *j* son (u^j_{PCk}, v^j_{PCk}) y la contribución del panel *j* al potencial en el punto de control *k* será (Eq. 2):

$$-\frac{\Phi_j}{2\pi} \int_{\text{panel j}} \frac{(\bar{x}-\bar{x}_{PCk})\cdot \bar{N}\,\mathrm{d}S}{\left|\bar{x}-\bar{x}_{PCk}\right|^2} = \frac{\Phi_j}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{v^j_{PCk}\, d\xi}{(u-u^j_{PCk})^2 + (v^j_{PCk})^2} = \frac{\Phi_j}{2\pi} \left\{ \underbrace{\mathrm{a\,rc\,tan}\left(\frac{l_j - u^j_{PCk}}{v^j_{PCk}} \right)}_{\beta^j_{kF}} + \underbrace{\mathrm{ar\,c\,tan}\left(\frac{u^j_{PCk}}{v^j_{PCk}} \right)}_{\beta^j_{kI}} \right\}$$

$$\beta^j_k = \beta^j_{kI} + \beta^j_{kF}$$

Para el propio panel, es decir, para $k = j$ es

$$u_k^j = \frac{l_j}{2} \quad , \quad v_k^j \to 0^+, \quad k = j$$

luego

$$\beta_{kI}^j \to \frac{\pi}{2} \quad , \quad \beta_{kF}^j \to \frac{\pi}{2}, \qquad k = j$$

Para la superficie de cortadura S_w se emplea un único panel $(j = N+1)$ de longitud infinita, de manera que $l_{N+1} \to \infty$, y por tanto

$$\beta_{kF}^{N+1} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(v_k^{N+1})$$

Finalmente, rescribiendo (1) se obtiene

$$\Phi_k = U_\infty(x_{PCk}\cos\alpha + z_{PCk}\sin\alpha) + \sum_{j=1}^{N}\frac{\Phi_j}{2\pi}\beta_k^j + \frac{\Phi_N - \Phi_1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(v_k^{N+1}) + \beta_{kI}^{N+1}\right)$$

que en forma matricial puede expresarse como

$$A_k^j \Phi_j = B_k \,, \quad k = 1,....N, \quad j = 1,....N$$

con

$$B_k = U_\infty(x_{PCk}\cos\alpha + z_{PCk}\sin\alpha)$$

y

$$A_k^j = \delta_k^j - \frac{\beta_k^j}{2\pi} \quad , \quad j \neq 1, N \,,$$

$$A_k^1 = \delta_k^1 - \frac{\beta_k^1}{2\pi} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(v_k^{N+1}) + \beta_{Ik}^{N+1}\right)}{2\pi}$$

$$A_k^N = \delta_k^N - \frac{\beta_k^N}{2\pi} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(v_k^{N+1}) + \beta_{Ik}^{N+1}\right)}{2\pi}$$

siendo

$$\beta_k^j = \left\{ \operatorname{ar\,c\,tan}\left(\frac{l_j - u_k^j}{v_k^j} \right) + \operatorname{ar\,c\,tan}\left(\frac{u_k^j}{v_k^j} \right) \right\} \quad , \quad k \neq j \, ,$$

$$\beta_k^j = \pi \quad , \quad k = j,$$

y

$$\beta_{kI}^{N+1} = \operatorname{ar\,c\,tan}\left(\frac{u_k^{N+1}}{v_k^{N+1}} \right).$$