Método de Torbellinos Discretos (2D)

Ana Laverón y Mª Victoria Lapuerta

Este método surge a partir del método de paneles (que se verá en próximas clases) y se emplea únicamente para líneas de curvatura. Consiste en discretizar el perfil en *N* paneles y sustituir después cada panel por un torbellino colocado a una distancia x del punto inicial de cada panel. Como la solución así obtenida consiste en una superposición de soluciones elementales, cumplirá con la ecuación diferencial $\Delta\Phi=0$.

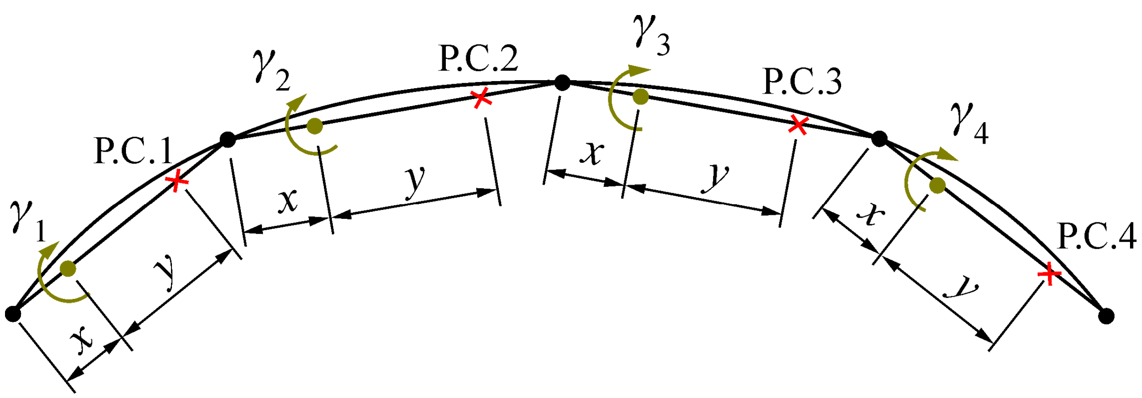


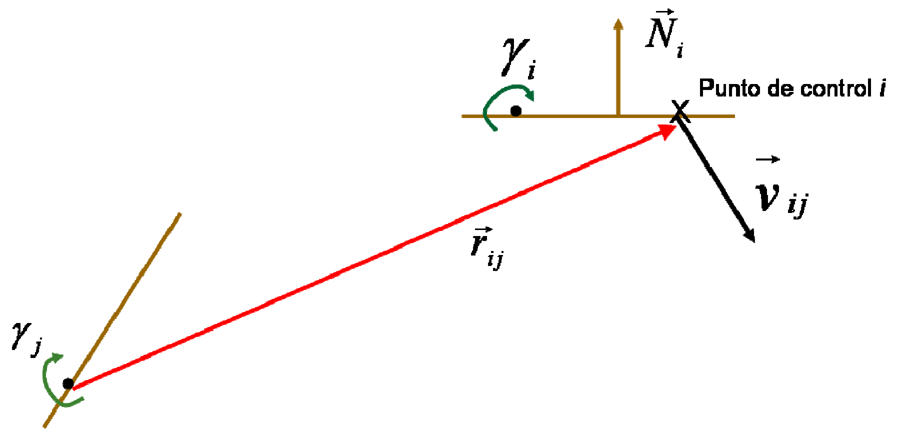
Figura 1

<u>Condiciones de contorno del problema:</u>

i. Velocidad normal nula sobre el perfil.
ii. Velocidad uniforme en el infinito.
iii. Condición de Kutta.

El problema quedará reducido a determinar las intensidades de los torbellinos que hacen que se cumplan las condiciones de contorno del problema (trasladándolas al problema discretizado de forma adecuada). Para ello se impondrán las condiciones de contorno en unos puntos (puntos de control). Hay un punto de control por cada panel situado a una distancia y del torbellino.

Sistema de ecuaciones



La velocidad en el punto de control *i* será la inducida por los *N* torbellinos más la velocidad de la corriente incidente.

Llamando $\vec{r}_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij})$ al vector que va del torbellino *j* al punto de control *i*, $\vec{r}_{Tj} = (\xi_{Tj}, \eta_{Tj})$ al radiovector del torbellino *j* y $\vec{r}_{PCi} = (\xi_{PCi}, \eta_{PCi})$ al radiovector del punto de control *i* se tiene:

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_{PCi} - \vec{r}_{Tj}$$

La velocidad inducida en el punto de control *i* por el torbellino *j*, $\vec{v}_{ij}$, es perpendicular a $\vec{r}_{ij}$ y puede calcularse como:

$$\vec{v}_{ij} = \frac{\gamma_j}{2\pi\left|\vec{r}_{ij}\right|}\vec{n}_{ij}, \text{ con } \vec{n}_{ij} = \frac{(\eta_{ij}, -\xi_{ij})}{\left|\vec{r}_{ij}\right|}$$

De manera que la velocidad en el punto *i* es:

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\gamma_j(\eta_{ij}, -\xi_{ij})}{2\pi\left|\vec{r}_{ij}\right|^2} + \vec{v}_\infty \qquad (1)$$

Tenemos *N* incógnitas (γ_j) y N ecuaciones, que se obtienen al imponer que la velocidad normal a cada panel en el punto de control sea nula:

$$\vec{v}_i \cdot \vec{N}_i = 0,\ i = 1, \ldots., N \tag{2}$$

donde $\vec{N}_i$ es el vector perpendicular al panel *i.* Llamando (ξ_i, η_i) a las coordenadas del nodo *i*, un vector en la dirección tangente al panel sería:

$$\vec{T}_i = (\xi_{i+1} - \xi_i, \eta_{i+1} - \eta_i) = (\Delta\xi_i, \Delta\eta_i),\ \text{luego}\ \vec{N}_i = (-\Delta\eta_i, \Delta\xi_i) \tag{3}$$

Llevando Eqs. (1) y (3) a (2) se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\gamma_j\ (\eta_{ij}, -\xi_{ij})(-\Delta\eta_i, \Delta\xi_i)}{2\pi \left|\vec{r}_{ij}\right|^2} = -\vec{v}_\infty \cdot (-\Delta\eta_i, \Delta\xi_i), \quad i = 1, \ldots, N$$

que puede expresarse en forma matricial como:

$$A\gamma = B$$

siendo:

$$A_{ij} = \frac{(\eta_{ij}, -\xi_{ij})(-\Delta\eta_i, \Delta\xi_i)}{2\pi \left|\vec{r}_{ij}\right|^2},\ B_i = \vec{v}_\infty \cdot (\Delta\eta_i, -\Delta\xi_i)$$