

# MÉTODO DE PANELES

M<sup>a</sup> Victoria Lapuerta González y Ana Laverón Simavilla

El método de paneles permite calcular numéricamente la solución de cualquier problema cuyo potencial de velocidades verifique la ecuación de Laplace:

$$\Delta\Phi = 0$$

La ventaja fundamental de este método es que permite reducir en un orden la dimensión del problema que se ha de resolver.

La idea básica del método consiste en sustituir el perfil y otras superficies de discontinuidad del potencial de velocidades por distribuciones de manantiales y dobletes (o torbellinos) cuyas intensidades dependen de las condiciones de contorno de tal manera que reproducen el mismo potencial de velocidades.

El método se basa en el **teorema de la divergencia**, que puede expresarse como:

$$\iiint_D \nabla \cdot \vec{A} \, dx dy dz = - \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{N} ds \quad (1)$$

donde  $\vec{A}$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  en  $D$  y  $\vec{N}$  es la normal interior a  $D$ . Tomando  $\vec{A} = F\nabla G - G\nabla F$ , donde las funciones  $F$  y  $G$  son de clase  $C^2$  en el interior de  $D$  y tales que verifican  $\Delta F = 0$ ,  $\Delta G = 0$ , se cumple que:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla F \cdot \nabla G + F\Delta G - G\Delta F - \nabla F \cdot \nabla G = 0$$

con lo que el teorema de la divergencia, Eq. (1), proporciona

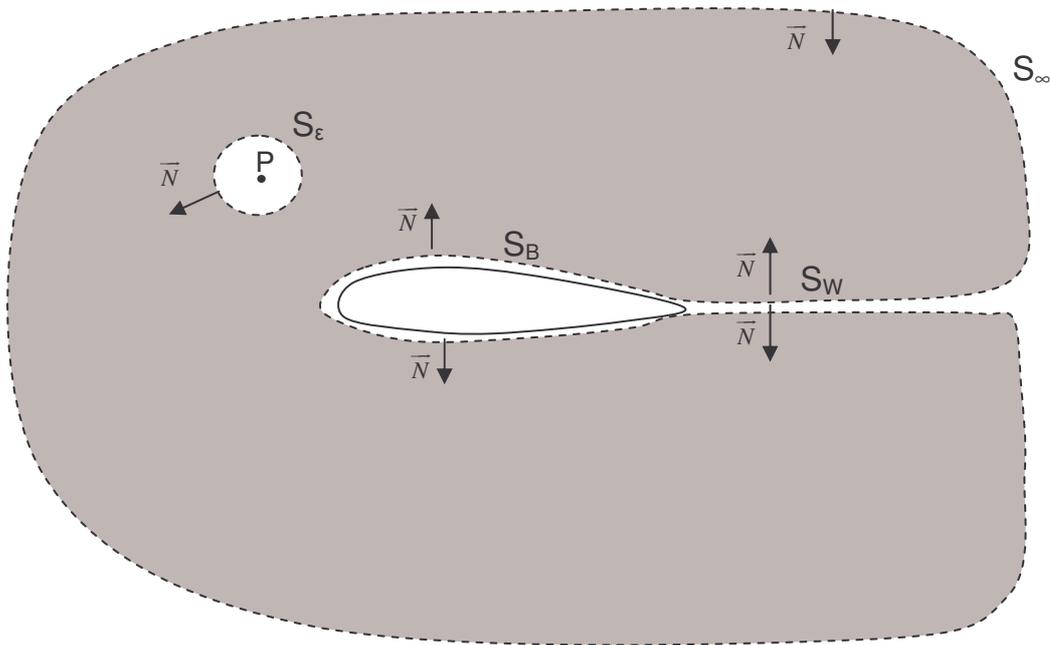
$$\iint_{\Sigma} (F\nabla G - G\nabla F) \cdot \vec{N} ds = 0 \quad (2)$$

Vamos a aplicar esta ecuación (o su equivalente para el caso bidimensional, que se obtendría de forma similar) para obtener el potencial de velocidades alrededor de un cuerpo. Para ello se toma  $F = \Phi$ ,  $G = \Phi_m$ , donde  $\Phi_m$  es el potencial generado por un manantial de gasto unidad situado en un punto genérico P exterior al cuerpo, que viene dado por:

$$\Phi_m = \frac{1}{2\pi} \log \left| \vec{x} - \vec{x}_P \right| \quad (2D)$$

$$\Phi_m = -\frac{1}{4\pi \left| \vec{x} - \vec{x}_P \right|} \quad (3D)$$

La ecuación (2) se podrá aplicar en las fronteras  $\Sigma$  que encierren dominios  $D$  en los que el campo vectorial  $\vec{A} = \Phi \nabla \Phi_m - \Phi_m \nabla \Phi$  sea de clase  $C^1$ . Así, en primer lugar se tomará  $\Sigma = S_B + S_{\varepsilon} + S_{\infty} + S_W$ ,



donde  $S_B$  es la superficie del cuerpo,  $S_W$  es una superficie de discontinuidad del potencial de velocidades (estela o superficie de cortadura) con dos caras, que conecta  $S_B$  y  $S_\infty$ , y  $S_\varepsilon$  es la superficie de una esfera (en 3D) o un círculo (en 2D) de radio  $\varepsilon$  que excluye del dominio el punto  $P$ , en el que  $\Phi_m$  y  $\nabla \Phi_m$  son infinitas. La ecuación (2) entonces puede expresarse como

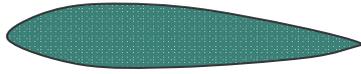
$$\iint_{S_B + S_W + S_\infty} (\Phi \nabla \Phi_m - \Phi_m \nabla \Phi) \cdot \vec{N} dS = - \underbrace{\iint_{S_\varepsilon} (\Phi \nabla \Phi_m \cdot \vec{N}) dS}_1 + \underbrace{\iint_{S_\varepsilon} (\Phi_m \nabla \Phi \cdot \vec{N}) dS}_2$$

Si se hace tender  $\varepsilon \rightarrow 0$ , como  $\Phi$  y  $\nabla \Phi$  son continuas en  $S_\varepsilon$  y su interior,  $\Phi \rightarrow \Phi(\vec{x}_P)$ ,  $\nabla \Phi \rightarrow \nabla \Phi(\vec{x}_P)$  y la integral 2 tiende a cero por simetría. La integral 1

tiende a  $-\Phi(\vec{x}_P)$ , puesto que la integral  $\iint_{S_\varepsilon} \nabla \Phi_m \cdot \vec{N} dS$  es el gasto volumétrico a través de  $S_\varepsilon$  producido por un manantial de gasto unidad, es decir la unidad. Con esto se obtiene

$$\Phi(\vec{x}_P) = \iint_{S_B + S_W + S_\infty} (\Phi_m \nabla \Phi - \Phi \nabla \Phi_m) \cdot \vec{N} dS \quad (3)$$

Por otra parte, la ecuación (2) podrá aplicarse también a la superficie  $S_B$ , considerándola ahora como frontera del interior del cuerpo, y definiendo un "potencial interior"  $\Phi_i$ , que verifica  $\Delta \Phi_i = 0$ .



Como el punto  $P$  no pertenece a esa región no hay que excluirlo. En este caso se obtiene

$$\iint_{S_B} (\Phi_m \nabla \Phi_i - \Phi_i \nabla \Phi_m) \cdot \vec{N} dS = 0 \quad (4)$$

En esta ecuación se ha tomado  $\vec{N}$  como la normal exterior a  $S_B$ , para que coincida con la que aparece en la ecuación (3).

Finalmente, restando las ecuaciones (3) y (4) resulta

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}_P) = & \iint_{S_B} (\Phi_m (\nabla \Phi - \nabla \Phi_i) \cdot \vec{N} - (\Phi - \Phi_i) \nabla \Phi_m \cdot \vec{N}) dS + \\ & + \iint_{S_W} \left( \underbrace{\Phi_m \nabla \Phi \cdot \vec{N}}_{=0} - \Phi \nabla \Phi_m \cdot \vec{N} \right) dS + \underbrace{\iint_{S_\infty} (\Phi_m \nabla \Phi \cdot \vec{N} - \Phi \nabla \Phi_m \cdot \vec{N}) dS}_{\Phi_\infty} \end{aligned}$$

donde el término de  $\nabla \Phi \cdot \vec{N} = \partial \Phi / \partial n$  da una integral cero en  $S_w$ , puesto que  $\partial \Phi / \partial n$  es continua a través de  $S_w$  y  $\vec{N}$  tiene sentidos opuestos a ambos lados de  $S_w$ . Por otra parte, al hacer tender  $|\vec{x}_P| \rightarrow \infty$ , la integral sobre  $S_\infty$  tiende a:  $\Phi_\infty = U_\infty (x \cos \alpha + z \sin \alpha)$ . Con todo esto se obtiene lo que se conoce como

**Fórmula de Green:**

$$\Phi(\vec{x}_P) = \underbrace{\iint_{S_B} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right) \Phi_m dS}_A - \underbrace{\iint_{S_B} (\Phi - \Phi_i) \nabla \Phi_m \cdot \vec{N} dS}_B - \underbrace{\iint_{S_W} (\Phi^+ - \Phi^-) \nabla \Phi_m \cdot \vec{N} dS}_C + \Phi_\infty \quad (5)$$

donde en la integral C, la superficie  $S_W$  se recorre ahora una s3la vez y  $\Phi^+ - \Phi^-$  es el salto de potencial a trav3s de  $S_W$ .

En la integral A aparece  $\Phi_m(|\vec{x}_S - \vec{x}_P|)$  donde  $\vec{x}_S$  es la posici3n del elemento  $dS$ , luego  $\Phi_m$  se puede interpretar tambi3n como el potencial producido en  $\vec{x}_P$  por un manantial situado en el punto  $\vec{x}_S$ . De esta forma la integral A se puede interpretar como una distribuci3n de manantiales sobre la superficie del cuerpo de intensidad  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial n}$ . En las integrales B y C aparece el t3rmino  $\nabla \Phi_m \cdot \vec{N}$  que puede interpretarse como el potencial producido en  $\vec{x}_P$  por un doblete situado en el punto  $\vec{x}_S$  de eje perpendicular a las superficies  $S_B$  o  $S_W$  (ver Ap3ndice). Luego estas integrales se pueden interpretar como distribuciones de dobletes a lo largo de la superficie del cuerpo y de la superficie de discontinuidad, de eje  $\vec{N}$  e intensidad  $\Phi - \Phi_i$  y  $\Phi^+ - \Phi^-$  respectivamente.

## Condiciones de contorno

Como ya se ha impuesto que el potencial de velocidades en el infinito sea el de la corriente incidente, la condici3n de contorno que falta por imponer sobre el potencial de velocidades es:

$$\text{Velocidad normal al cuerpo nula: } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

Esta condici3n se puede sustituir en la expresi3n (5) obteni3ndose

$$\Phi_P = - \underbrace{\int_{S_B} \sigma \Phi_m dS}_{\text{manantiales}} - \underbrace{\int_{S_B} \mu \nabla \Phi_m \cdot \vec{N} dS}_{\text{dobletes}} - \underbrace{\int_{S_W} (\Phi^+ - \Phi^-) \nabla \Phi_m \cdot \vec{N} dS}_{\text{dobletes}} + \Phi_\infty \quad (7)$$

con

$$\sigma = \frac{\partial \Phi_i}{\partial n}, \quad \mu = \Phi - \Phi_i$$

Para obtener la soluci3n del problema se hace tender P a  $S_B$ . El problema puede resolverse de dos formas:

## Resolución tipo Dirichlet

Considerar como incógnita el potencial sobre el perfil. Se discretiza directamente la ecuación (7)

## Resolución tipo Neumann

Derivar en (7) e imponer la condición (6), es decir,  $\nabla\Phi \cdot \vec{N} = 0$ . En este caso las incógnitas son las intensidades de dobletes,  $\square$ , y manantiales,  $\square$ .

## **Elección del potencial interior $\Phi_i$**

Depende de lo que se desee. Por ejemplo, para simplificar cálculos conviene tomar  $\Phi_i = 0$ , con lo que desaparecen los manantiales.

$$\Phi_P = - \int_{S_B} \mu \nabla \Phi_m \cdot \vec{N} dS - \int_{S_W} (\Phi^+ - \Phi^-) \nabla \Phi_m \cdot \vec{N} dS + \Phi_\infty$$

con  $\mu = \Phi$ .

Sin embargo, para mejorar la convergencia del método puede ser más interesante tomar  $\Phi_i = \Phi$  en  $S_B$ :

$$\Phi_P = - \int_{S_B} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \Phi_m dS - \int_{S_W} (\Phi^+ - \Phi^-) \nabla \Phi_m \cdot \vec{N} dS + \Phi_\infty$$

En cualquier caso, independientemente de cómo se elija  $\Phi_i$ , siempre se verifica que la suma de las intensidades de los manantiales distribuidos sobre el cuerpo es nula. Aplicando (1) a  $\vec{A} = \nabla \Phi_i$  se obtiene  $\nabla \cdot \vec{A} = \Delta \Phi_i = 0$ , luego

$$\iiint_{V_{Bi}} \nabla \cdot \vec{A} dx dy dz = 0 = \iint_{S_B} \vec{A} \cdot \vec{N} ds = \iint_{S_B} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} ds$$

es decir,

$$\iint_{S_B} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} ds = 0$$

donde  $V_{Bi}$  es el volumen del cuerpo limitado por  $S_B$ .

## Apéndice

Sólo se incluye la demostración para 2D.

Por una parte se tiene:

$$\begin{aligned}\Phi_m(\bar{x}_P) &= \frac{1}{2\pi} L |\bar{x}_S - \bar{x}_P| \\ \nabla \Phi_m(\bar{x}_P) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\bar{x}_S - \bar{x}_P}{|\bar{x}_S - \bar{x}_P|^2} \\ \nabla \Phi_m \cdot \bar{N} &= \frac{-\cos \theta}{2\pi |\bar{x}_S - \bar{x}_P|}\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde  $\theta = \text{ang}(\bar{N}, \bar{x}_P - \bar{x}_S)$

Por otra parte, el potencial complejo de un doblete (2D) de intensidad unidad situado en un punto  $S$  cuyo eje forma un ángulo  $\beta$  con el eje  $x$  es

$$f(t_P) = \frac{e^{i\beta}}{2\pi(t_P - t_S)} = \frac{e^{i(\beta - \theta_P)}}{2\pi|t_P - t_S|}, \quad \theta_P = \text{ang}(t_P - t_S, \text{eje } x)$$

luego el potencial de velocidades es

$$\Phi(t_P) = \frac{\cos(\beta - \theta_P)}{2\pi|t_S - t_P|} = \frac{\cos \theta}{2\pi|t_S - t_P|}\tag{A.2}$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forman  $t_P - t_S$  y el eje del doblete.

Finalmente comparando (A.1) y (A.2) se obtiene que  $\nabla \Phi_m \cdot \bar{N}$  es el potencial de un doblete de intensidad unidad y de eje  $-\bar{N}$ .