Revisión de la formulación de Neumann para perfiles con espesor

Mª Victoria Lapuerta González y Ana Laverón Simavilla

La ecuación para el potencial de velocidades que se obtiene con la formulación de Dirichlet para potencial constante es:

$$\Phi_k = U_\infty (x_{PCk} \cos\alpha + z_{PCk} \sin\alpha) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Phi_j}{2\pi} \beta_k^j +$$
$$+ \frac{\Phi_N - \Phi_1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(v_k^{N+1}) + \beta_{kI}^{N+1} \right)$$

que también puede escribirse como

$$\Phi_k(\vec{x}_k) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\Phi_j}{2\pi} \left(\theta_{kF}^j - \theta_{kI}^j \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta_k^\infty + \Phi_\infty(\vec{x}_k), \quad (1)$$

donde $\Gamma=\Phi_N-\Phi_1$ y, como puede verse en la Figura 1, se llama θ_{kI}^j al ángulo que forma el segmento que une el punto de control $\vec{x}_k$ y el nodo inicial del panel *j* con el panel de la estela, y θ_{kF}^j al ángulo que forma el segmento que une el punto $\vec{x}_k$ y el nodo final del mismo panel con el panel de la estela, con lo cual se obtiene:

$$\beta_k^j = \beta_{kI}^j + \beta_{kF}^j = \theta_{kF}^j - \theta_{kI}^j$$

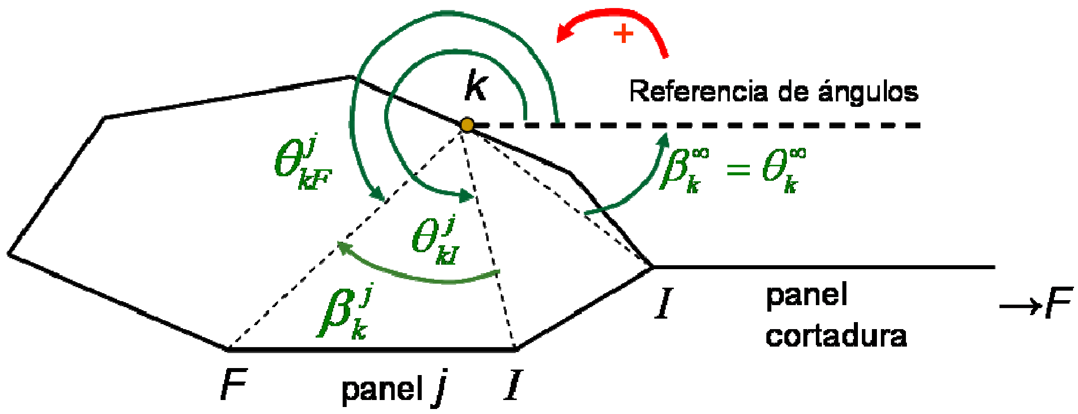

Figura 1

La ecuación (1) muestra que el potencial de velocidades producido por una distribución uniforme de dobletes de intensidad Φ_j a lo largo del panel es equivalente al potencial producido por dos torbellinos situados en los extremos del panel de intensidades Φ_j y $-\Phi_j$, ver Fig. 2 (se recuerda que con esa definición de ángulos el potencial que produciría un torbellino de intensidad unidad situado en un punto *j* sería $-\theta_j/2\pi$).

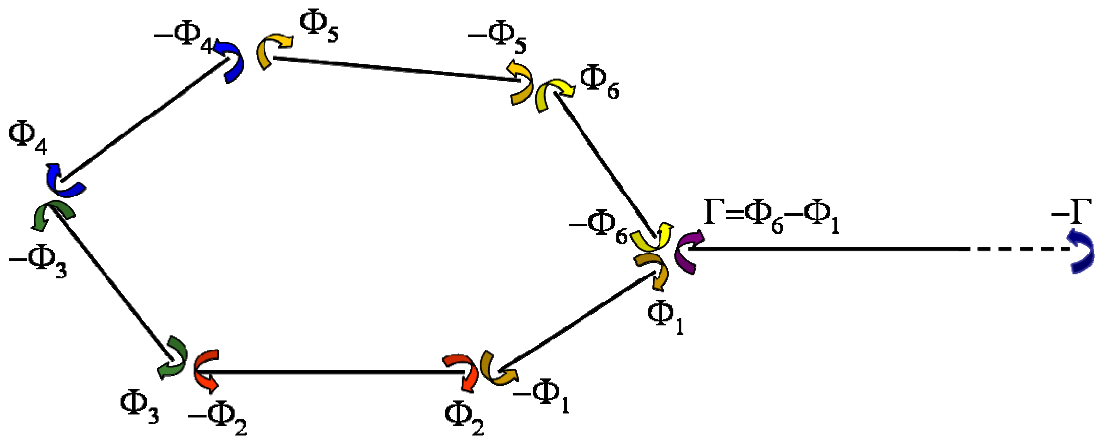

Figura 2

Derivando en la Eq. (1) y multiplicando por el vector normal al panel *k* para obtener la velocidad normal a dicho panel e igualarla a cero,

$$\nabla_k \Phi \cdot \vec{n}_k = 0 \, ,$$

se obtiene

$$0=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N}\Phi_j\left(\theta'^{\,j}_{kF}-\theta'^{\,j}_{kI}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi}\theta'^{\,\infty}_{k}+V_{nk\infty},$$

donde

$$\theta'^{\,j}_{k}=\nabla_k\theta^j_k\cdot\vec{n}_k=\frac{(\overrightarrow{x_k}-\overrightarrow{x_j})\cdot\overrightarrow{t_k}}{|\overrightarrow{x_k}-\overrightarrow{x_j}|^2}$$

y $V_{nj\infty}$ es la componente normal al panel *j* de la velocidad de la corriente en el infinito. Multiplicando la ecuación anterior por 2π, reordenando los diferentes términos, teniendo en cuenta que $\theta^j_{kI}=\theta^{j-1}_{kF}$ y llamando γ_j a la diferencia de potencial numérico entre dos paneles consecutivos, $\gamma_j=\Phi_j-\Phi_{j-1}\quad j=2,\ldots,N$, se tiene

$$\begin{aligned}0&=\Phi_N\theta'^{\,N}_{kF}-\Phi_N\theta'^{\,N-1}_{kF}+\Phi_{N-1}\theta'^{\,N-1}_{kF}-\Phi_{N-1}\theta'^{\,N-2}_{kF}+\ldots+\\&+\Phi_2\theta'^{\,2}_{kF}-\Phi_2\theta'^{\,1}_{kF}+\Phi_1\theta'^{\,1}_{kF}-\Phi_1\theta'^{\,1}_{kI}+\left(\Phi_N-\Phi_1\right)\theta'^{\,\infty}_{k}+2\pi V_{nk\infty}=\\&=\Phi_N\theta'^{\,N}_{kF}-\Phi_1\theta'^{\,1}_{kI}+\left(\Phi_N-\Phi_1\right)\theta'^{\,\infty}_{k}-\sum_{j=2}^{N}\left(\Phi_j-\Phi_{j-1}\right)\theta'^{\,j-1}_{kF}+2\pi V_{nk\infty}=\\&=\Phi_N\underbrace{\left(\theta'^{\,N}_{kF}+\theta'^{\,\infty}_{k}\right)}_{0}-\Phi_1\underbrace{\left(\theta'^{\,1}_{kI}+\theta'^{\,\infty}_{k}\right)}_{0}-\sum_{j=2}^{N}\gamma_j\theta'^{\,j-1}_{kF}+2\pi V_{nk\infty}\end{aligned}$$

de modo que finalmente la ecuación para el punto *k* queda

$$\sum_{j=2}^{N}\gamma_j\theta'^{\,j}_{kF}=2\pi V_{nk\infty},\qquad (2)$$

por tanto lo que parecía un sistema de *N* incógnitas: $\Phi_1,\ldots,\Phi_N$ ha resultado ser en realidad un sistema de *N*-1 incógnitas: $\gamma_2,\ldots,\gamma_N$, ver Fig. 3. Esto significa que aunque el perfil se divida en *N* paneles, **sólo se pueden imponer *N*-1 ecuaciones en *N*-1 puntos de control**.

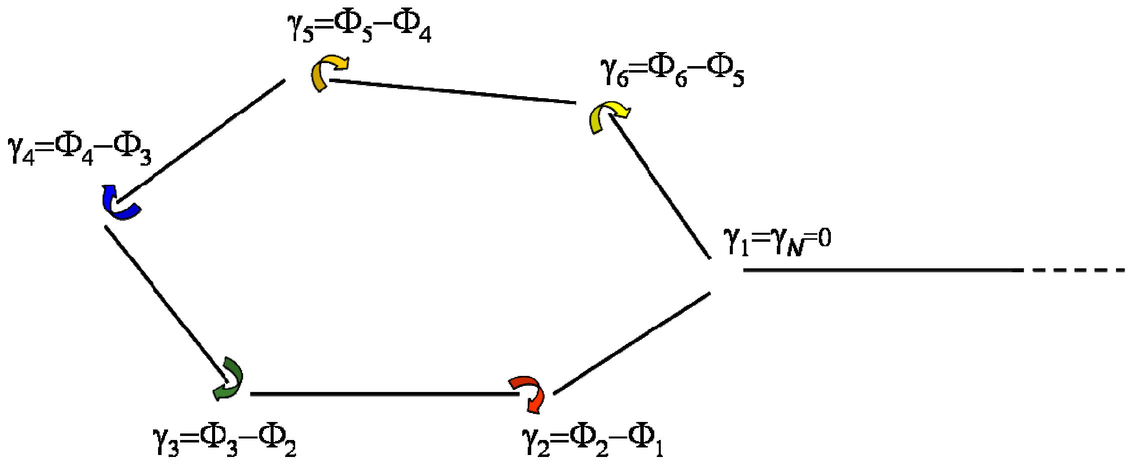

Figura 3

Es importante señalar que aunque en alguna publicación se asegura que la formulación de Neumann en el caso de perfiles con espesor es resoluble en las variables del potencial de velocidades numérico, Φ_j, esto no es cierto, ya que la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales resultante en esas variables es singular y sólo es posible resolver el sistema en las variables $\gamma_j = \Phi_{j+1} - \Phi_j$. La circulación alrededor del perfil se calcularía entonces como:

$$\Gamma = \Phi_N - \Phi_1 = \sum_{j=2}^{N} \gamma_j \quad .$$

A la hora de aplicar el método de Neumann se considerarán *N*-1 torbellinos situados en los nodos (el torbellino de los nodos 1 y *N*+1 tiene intensidad nula: $\gamma_1=\gamma_{N+1}=\Gamma+\Phi_1-\Phi_N=0$) **y se impondrá que la velocidad normal al panel sea nula en *N*-1 puntos de control: 2,….,*N***.