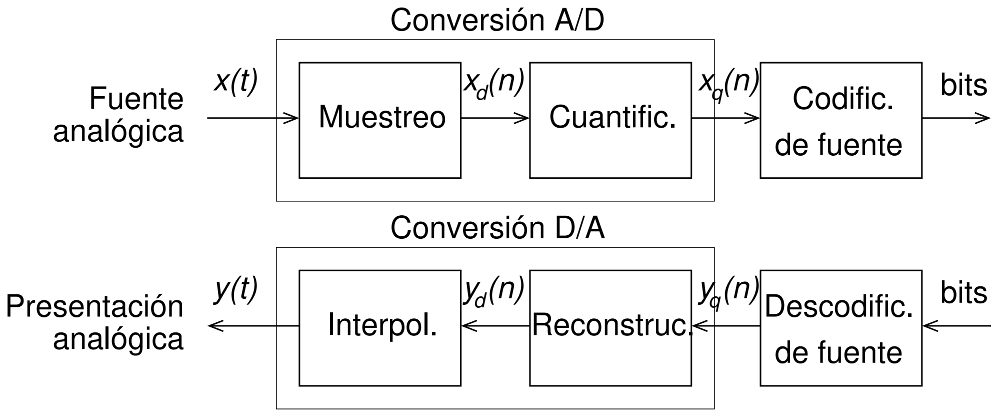
# Caracterización de la señal digital

# Caracterización de la señal digital

## Contenido

- Codificación digital de señales analógicas:
  - Módulos.
  - Módulo de cuantificación:
    - Ruido de cuantificación.
    - Optimización del cuantificador uniforme y no uniforme.
    - Cuantificación robusta en cuantificador no uniforme.
  - Módulo de codificación de fuente.
- Caso de estudio:
  - Representación digital de la señal de audio.
  - Sistema MIC.
- Problemas.

# Codificación digital de señales analógicas




Parejas de módulos:

- Muestreo/Interpolación.
- Cuantificación/Reconstrucción.
- Codificación/Descodificación de fuente.

# Muestreo/Interpolación

**Muestreo**: Convierte la señal continua en el tiempo $x(t)$ en una señal discreta en el tiempo $x_d(n)$. Consta de:

- **Filtrado paso bajo**: Limita en banda la señal $x(t)$ dando como resultado $x_f(t)$.
- **Muestreo** propiamente dicho: Genera la señal $x_d(n) = x_f(nT_s)$ donde $T_s = 1/f_s$ es el **período de muestreo** ($f_s$ es la *frecuencia de muestreo*).
  Para preservar la información de $x_f(t)$ debe ser $f_s \geq 2f_{max}$ donde $f_{max}$ es la frecuencia máxima de $x_f(t)$ (criterio de Nyquist).

**Interpolación**: Genera una señal continua en el tiempo $y(t)$ a partir de la señal discreta en el tiempo $y_d(n)$ reconstruida en el descodificador. Consta de:

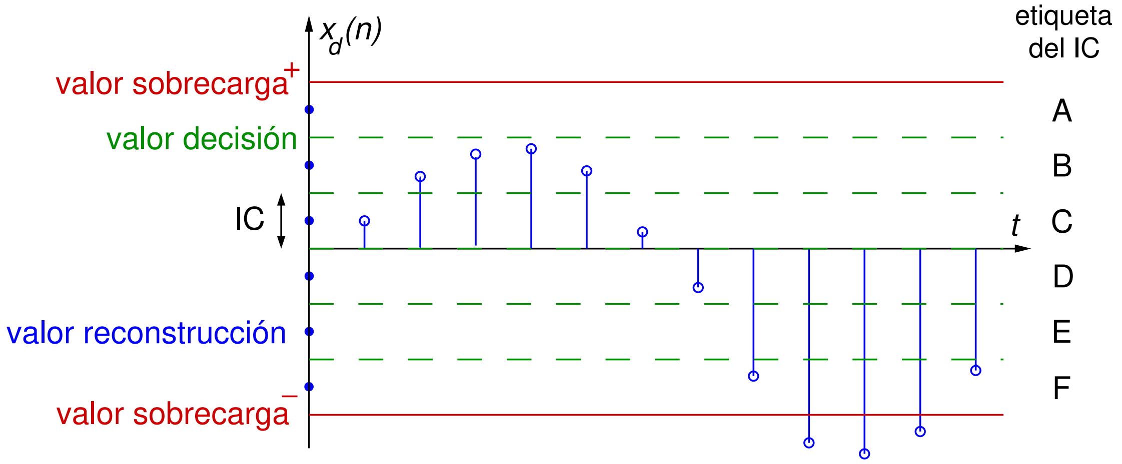
- **Generación de pulsos**: Da lugar a la señal
  $$y_p(t) = \sum_n y_d(n)\, p_I(t - nT_s)$$
  donde $p_I(t)$ (**pulso interpolador**) es una señal de corta duración (en el caso ideal, una delta de Dirac).
  El espectro de la señal resultante $y_p(t)$ es una sucesión de espectros de $x_f(t)$ centrados en $f_i = i \cdot f_s$, con $i = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$, multiplicada por la transformada de Fourier del pulso interpolador.
- **Filtrado paso bajo**: Su objetivo es eliminar las réplicas (alias) del espectro fundamental que se encuentran en la señal $y_p(t)$.

# Cuantificación/Reconstrucción (1)

**Cuantificación**: La naturaleza real de las muestras $x_d(n) \Rightarrow$ en general no se pueden representar de forma finita $\Rightarrow$ imprescindible transmitir una versión aproximada, $x_q(n)$, representable de forma finita:

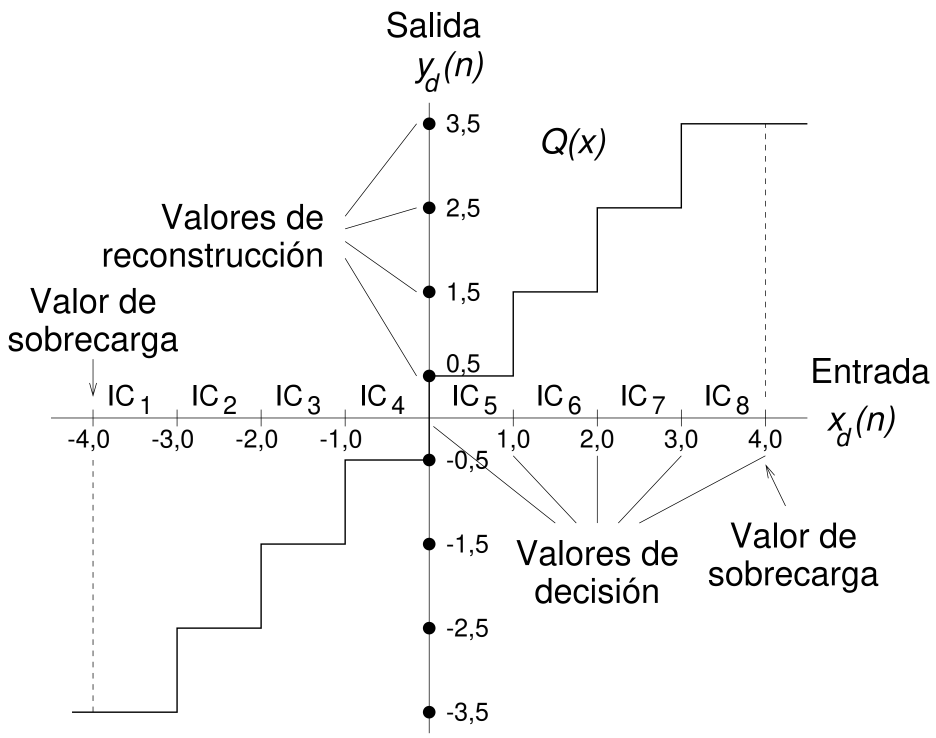
- Convierte la señal de entrada, con valores reales, en una señal que solo toma un conjunto discreto de valores $(1, 2, ...L)$.
- Se divide la recta real (amplitudes señal entrada) en un conjunto finito de intervalos disjuntos (generalmente simétricos): **intervalos de cuantificación** ($\mathrm{IC}_1$, $\mathrm{IC}_2$, ..., $\mathrm{IC}_L$).
- Los valores que delimitan los intervalos se denominan **valores de decisión**.
  Valores de decisión extremos = **valores de sobrecarga**.
- Se asigna a cada valor de entrada el número (**etiqueta**) del intervalo al que pertenece.
- La cuantificación implica una **pérdida irreversible** de información.

**Reconstrucción**: Asigna a la señal de entrada (que toma valores discretos que representan etiquetas de intervalo) un **valor de reconstrucción** que es un número real, elegido como representante del intervalo correspondiente.



# Cuantificación/Reconstrucción (2)

La composición de las operaciones de cuantificación y reconstrucción se puede representar gráficamente como una función $Q(x)$ de entrada/salida escalonada: **característica del cuantificador**.




A veces se usa el término **nivel** en vez de intervalo de cuantificación.

# Codificación/Descodificación de fuente

**Codificación de fuente**: Representa la secuencia de etiquetas (salida del cuantificador) mediante una cadena de símbolos $\in$ alfabeto finito (p.ej.: binario).
Caso más simple: código de longitud fija, p.ej.: 8 IC $\Rightarrow$ palabras código de $\lceil \log_2 8 \rceil = 3$ b.
Caso general: código más eficiente, con palabras de longitud variable (con el menor número de bits posible).

**Ejemplo**:
Cuantificador con **cuatro** intervalos de cuantificación, cuyas probabilidades de que las muestras 'caigan' en ellos son 1/2, 1/4, 1/8 y 1/8.

Asignación de palabras código de longitud fija:

Todos los niveles tienen asignación fija de 2 b/muestra.

Asignación de palabras código por Huffman:

| Nº nivel | Probabilidad | Palabra código | Long. palabra |
|---|---|---|---|
| 0 | $p_0 = 1/2$ | 0 | $l_0 = 1$ |
| 1 | $p_1 = 1/4$ | 10 | $l_1 = 2$ |
| 2 | $p_2 = 1/8$ | 110 | $l_2 = 3$ |
| 3 | $p_3 = 1/8$ | 111 | $l_3 = 3$ |

Número medio de bits por muestra:

$$r = \sum_{i=0}^{3} p_i \, l_i = \frac{1}{2}\,1 + \frac{1}{4}\,2 + \frac{1}{8}\,3 + \frac{1}{8}\,3 = 1{,}75 \quad \text{b/muestra}$$

# Codificación/Descodificación de fuente con pérdidas

La codificación de fuente puede ser mucho más compleja, e incluso comportar una pérdida adicional de información (codificación de fuente *con pérdidas*).
Este es el caso de las técnicas más avanzadas como la codificación predictiva, transformacional, en subbandas.

La operación previa de cuantificación tiene como único objetivo asignar a cada muestra una representación numérica de forma que el sistema de compresión de fuente sea totalmente digital (computador especializado).

**Ejemplo**: Un sistema de audio que transmita la señal en formato de CD (1,41 Mb/s) incluirá los módulos *muestreo* (a 44,1 kmuestras/s) y *cuantificación* (uniforme con $2^{16}$ intervalos), y el módulo de *codificación de fuente* se limitará a asignar un código de 16 bits a cada nivel de salida del cuantificador.

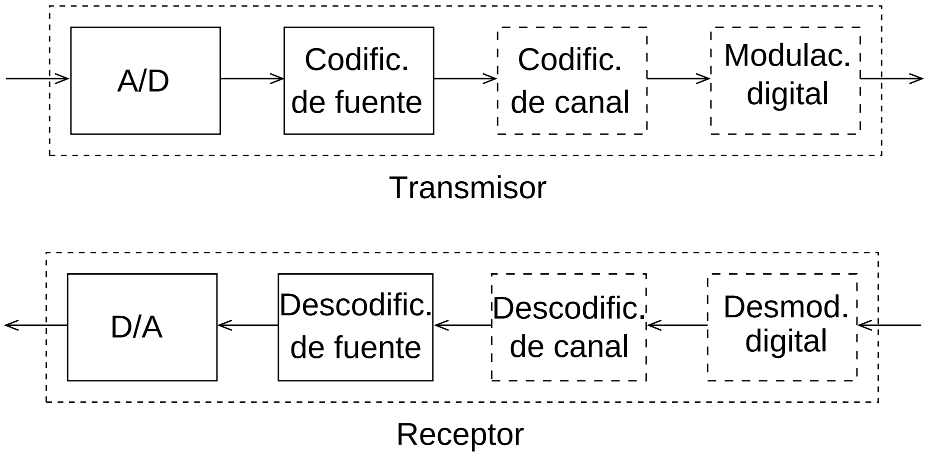
Sin embargo, un sistema de tipo *DCC* (384 kb/s) tomaría como entrada la salida del cuantificador anterior y realizaría operaciones más complejas de codificación de fuente, reduciendo el régimen binario de salida muy por debajo de 16 b/muestra, con una cierta pérdida de información.

Caracterización de los **codecs**[1]: distorsión para una velocidad en b/s dada.

[1] Códec = Codificador-Descodificador.

# Dentro de la cadena de transmisión digital

La figura muestra dónde van los módulos de conversión A/D, codificación de fuente, y sus equivalentes de recepción, dentro de la cadena transmisión digital.




En el tema 5 se verán las parejas de módulos:

- Codificación/Descodificación de canal.
- Según el caso:
  - Modulación/Desmodulación o,
  - Codificación/Descodificación de línea.

La modulación digital, y la codificación de línea, pueden estar precedidas por un aleatorizador que modifica la secuencia de bits de entrada eliminando largas secuencias de bits iguales para permitir una mejor recuperación del reloj en recepción.

# Codificación/Descodificación de canal

## **Codificación de canal** (CC):

- Añade redundancia a la señal binaria procedente del módulo de codificación de fuente.
- Esta redundancia **protege la señal frente a errores de transmisión** que puedan producirse.
- Normalmente trabaja por *bloques*, añadiendo $q$ bits de redundancia a cada bloque de $p$ bits. El **descodificador de canal** analiza el bloque de $p+q$ bits que le llega (tal vez con errores) e infiere cuál es el bloque de $p$ bits que con más probabilidad se corresponde con el bloque recibido.


- A la entrada se habla de velocidad binaria neta, útil, de información.
  La CC añade bits de sobrecarga, de redundancia.
  A la salida se habla de velocidad binaria bruta, total, después de la CC
- Para una velocidad del canal dada, se disminuye la probabilidad de error del canal a costa de reducir su velocidad binaria útil.

## **Ejemplos de redundancia**:

- El caso más simple (ineficiente): **repetir** 2 veces cada bit ($p=1$, $q=2$) y decisión por mayoría.
  - Sin errores de transmisión $\Rightarrow$ solo llegarán bloques 111 o 000
  - Con errores $\Rightarrow$ puede recibir bloques como 101, 001, etc.
- Un caso práctico: Reed-Solomon RS(32,28), utilizada en los CD. Se añade a cada bloque de $p=28$ bytes un bloque de $q=4$ bytes ($p+q=32$ bytes) y el descodificador de canal puede corregir hasta dos bytes erróneos en estos 32 bytes.

Caracterización de los **codecs**: redundancia introducida, capacidad de detectar errores, capacidad de corregir errores.

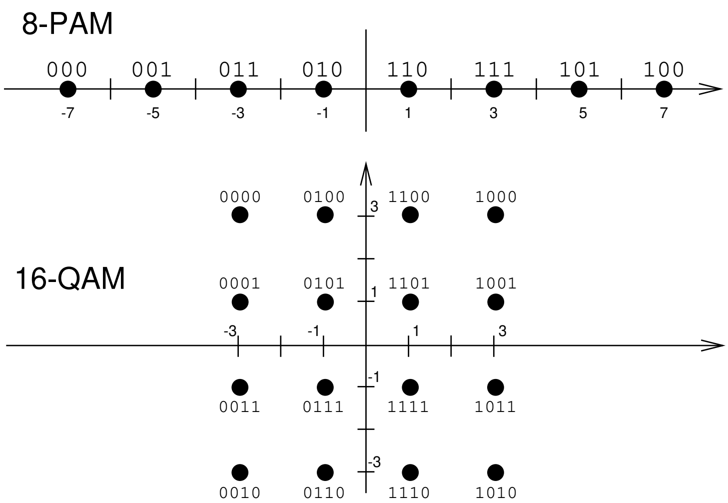
# Modulación/Desmodulación

Caso más general de modulador ⇒ dos etapas:

- **Modulador digital**: Genera una señal en el tiempo a partir de una secuencia de símbolos discretos. P. ej.: PAM, QAM, PSK...
  Su **velocidad de transmisión** (**baudios**) también se denomina:
  - número de señales transmitidas por unidad de tiempo,
  - número de símbolos transmitidos por unidad de tiempo,
  - velocidad del modulador.

  Es distinta de la **velocidad de información** transmitida (**b/s**).

  Ejemplo de diagramas del espacio de señales para 8-PAM y 16-QAM:




- **Conversor de frecuencia**: Aplica una modulación analógica (DBL, BLU, etc.) para trasladar la señal anterior a la frecuencia de transmisión adecuada a las características del canal.

El desmodulador digital se denomina también **receptor digital**. Debe incluir un módulo de **recuperación del reloj** de la señal.

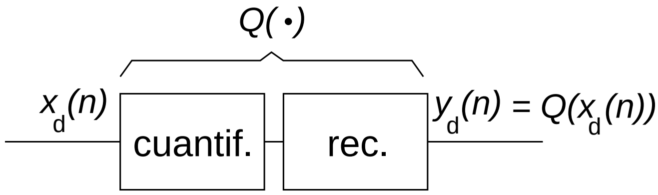
Caracterización de los **modems**[1]: potencia media de la señal de salida, probabilidad de error para una S/N dada en el receptor.

[1] Módem = Modulador-Desmodulador.

# Módulo de cuantificación

Se estudian de forma conjunta la cuantificación y la reconstrucción, denominándose generalmente solo como cuantificación.

Llamamos $Q(\cdot) = \text{Rec}\,(\,\text{Cuant}(\cdot)\,)$




Por simplicidad, quitaremos el subíndice "d".

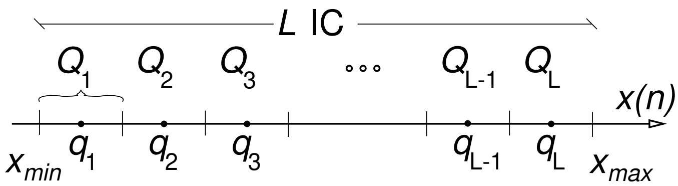
La operación conjunta de cuantificación + reconstrucción transforma una secuencia de muestras de entrada $\{x(n)\}$, con $x(n) \in \mathbb{R}$, en una secuencia de valores $\{y(n)\}$, donde $y(n) \in \{q_1, q_2, \ldots q_L\}$ con $q_i \in \mathbb{R}$.

Cuantificación escalar: $y(n) = Q(x(n))$ $\Leftarrow$ La que veremos

Cuantificación vectorial: $\overrightarrow{y}(n) = Q(\overrightarrow{x}(n))$

Sea $[x_{min}, x_{max}]$ el intervalo de variación de la señal $x(t)$, y por lo tanto de la secuencia $\{x(n)\}$. Un cuantificador queda definido por un conjunto de $L$ intervalos de cuantificación $\{Q_i\}$ y un conjunto de $L$ valores de reconstrucción $\{q_i\}$ tales que:

- $\bigcup_i Q_i = [x_{min}, x_{max}]$
- $Q_i \bigcap Q_j = \emptyset \quad \forall\, i, j / i \neq j$




La característica del cuantificador se define entonces:

$$Q(x) = q_i \quad \Leftrightarrow \quad x \in Q_i$$

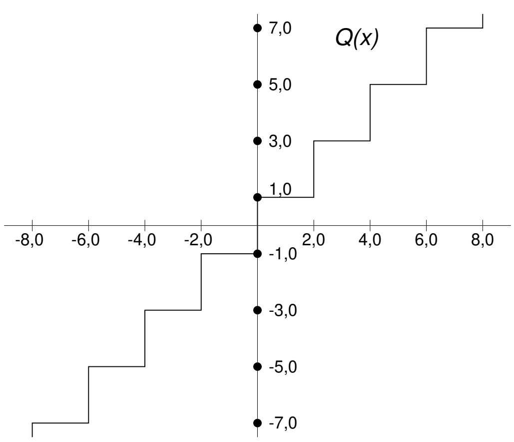
Se suele identificar el nº de intervalos de cuantificación por el nº de bits necesarios para representar las etiquetas con codificación de longitud fija:

cuantif. de 8 IC $\Rightarrow$ 3 b $\rightarrow$ cuantif. de 3 bits.

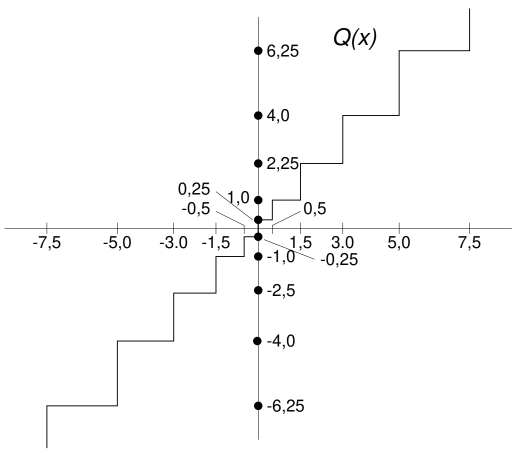
# Tipos de cuantificadores

Cuantificador **simétrico**: $Q(x) = -Q(-x)$.

Cuantificador **uniforme**: Todos los intervalos tienen la misma amplitud.
Cuantificador **no uniforme**: No cumple la condición anterior.

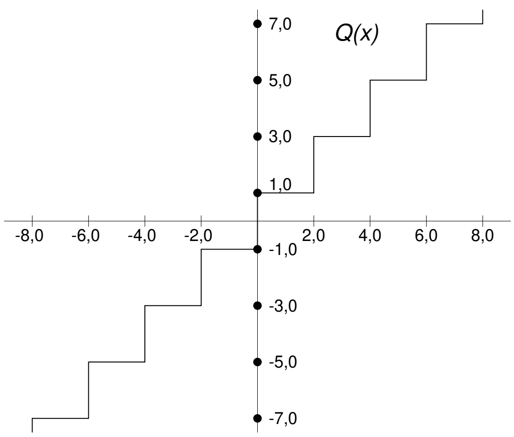



Cuantificador uniforme

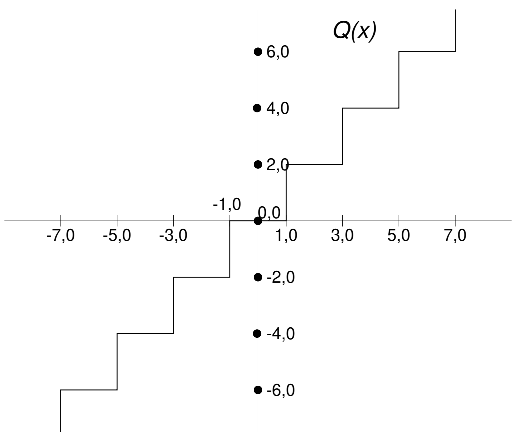



Cuantificador no uniforme

Cuantificador **sin corte central** (p.ej. Ley A): el 0 es un valor de decisión.
Cuantificador **con corte central** (p.ej. Ley $\mu$): el 0 es un valor de reconstrucción.



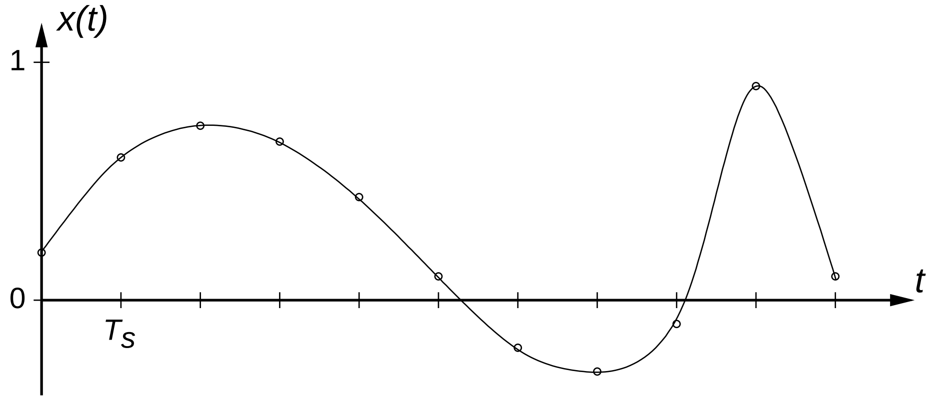

Cuantificador sin corte central
*(mid-riser, mid-rise)*

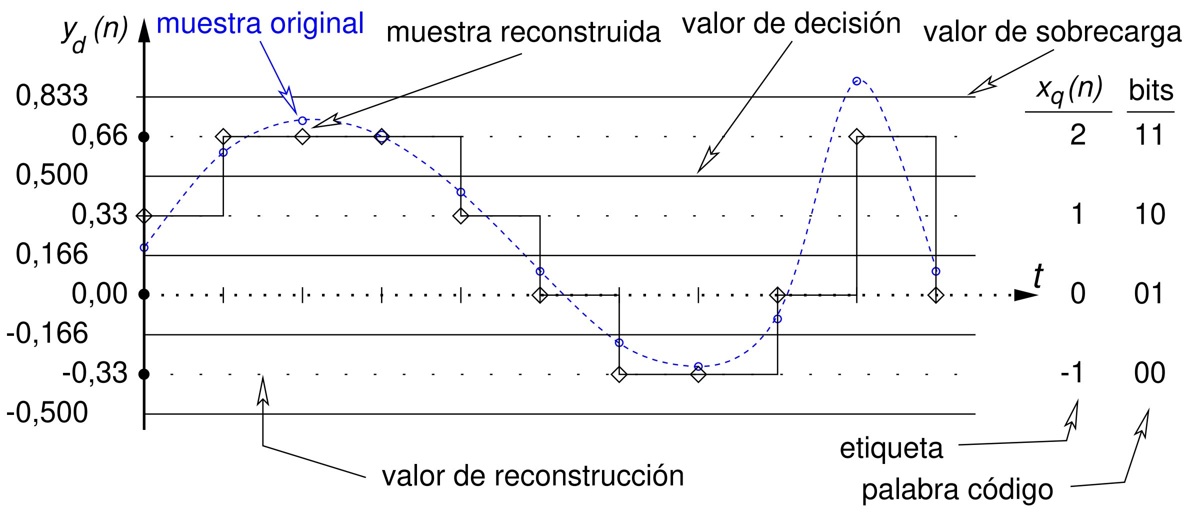



Cuantificador con corte central
*(mid-tread, mid-step)*

# Ej. cuantificación, codificación y reconstrucción

Señal muestreada, en el que las muestras $x(nT_s)$ son cuantificadas uniformemente con **cuatro** intervalos de cuantificación (con etiquetas: $-1$, 0, 1 y 2 que se codifican con las palabras código: 00 01 10 y 11):




| Intervalo Cuantif. | $IC_1$ | $IC_2$ | $IC_3$ | $IC_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Rango de $x_d(n)$ | $[-\infty;-0{,}166]$ | $(-0{,}166;0{,}166]$ | $(0{,}166;0{,}5]$ | $(0,\ 5;\infty]$ |
| Etiqueta | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
| Palabra código | 00 | 01 | 10 | 11 |
| Valor reconstruc. | $-0{,}333$ | 0 | 0,333 | 0,666 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Secuencia de etiquetas: | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | $-1$ | $-1$ | 0 | 2 | 0 |
| Secuencia de bits: | 10 | 11 | 11 | 11 | 10 | 01 | 00 | 00 | 01 | 11 | 01 |

# Ruido de cuantificación (1)

**Error**, **ruido** o **distorsión de cuantificación** es:

$$e_q(n) = x(n) - y(n) = x(n) - Q(x(n))$$

(a veces se define también como $e_q(n) = y(n) - x(n)$)

**Potencia del ruido de cuantificación** es su valor cuadrático medio:

$$E[e_q^2] = \int_{x_{min}}^{x_{max}} (x - Q(x))^2 f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{L} \int_{Q_i} (x - q_i)^2 f(x)\, dx$$

donde $f(x)$ es la función densidad de probabilidad (fdp) de las muestras a cuantificar.

Si el cuantificador se ha diseñado de tal manera que la media del error de cuantificación es cero:

$$E[e_q] = 0 \quad \Rightarrow \quad E[e_q^2] = \sigma_{e_q}^2$$

En sistemas de transmisión digital de señales analógicas, la distorsión de cuantificación proporciona una cota superior[1] de la medida de calidad de la señal, por lo que se habla de relación señal a distorsión ($S/D$) de forma similar a la relación señal a ruido ($S/N$) en transmisión analógica.

[1] Se introduce una degradación adicional si:
- La codificación de fuente es con pérdidas.
- Hay errores de transmisión.

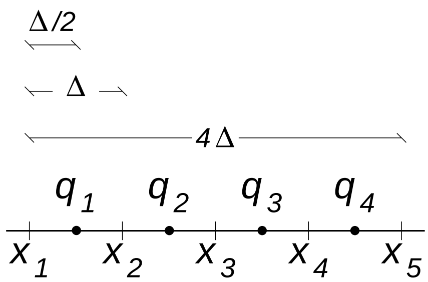
# Ruido de cuantificación (2)

Veamos la influencia de la sobrecarga en el error de cuantificación.

Sea un cuantificador uniforme con:

- 4 IC de amplitud $\Delta$,
- Valor de reconstrucción en el centro del IC (en $\Delta/2$).

$$x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad \Rightarrow \quad |e_q(n)| \leq \Delta/2$$




En $[x_1, x_5]$ el valor absoluto del error de cuantificación se mantiene acotado, siempre $\leq \Delta/2$. Se habla de **ruido granular**.

Para $x < x_1$ o $x > x_5$ el error de cuantificación no está acotado. Se habla de **ruido de sobrecarga**. Su contribución a la potencia del ruido de cuantificación puede ser arbitrariamente grande.

$$\sigma_{e_q}^2 = \underbrace{\int_{-\infty}^{x_1} (x - q_1)^2 f(x)\,dx}_{\text{sobrecarga}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{L} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - q_i)^2 f(x)\,dx}_{\text{granular}} + \underbrace{\int_{x_{L+1}}^{\infty} (x - q_L)^2 f(x)\,dx}_{\text{sobrecarga}}$$

La probabilidad de que se produzca sobrecarga será:

$$P(\text{sobrecarga}) = P(x < x_1) + P(x > x_{L+1}) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_{L+1}}^{\infty} f(x)\,dx$$

Los valores $x_1$ y $x_{L+1}$ no influyen en la expresión de $\sigma_{e_q}^2$:

$$\sigma_{e_q}^2 = \int_{-\infty}^{x_2} (x - q_1)^2 f(x)\,dx + \sum_{i=2}^{L-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - q_i)^2 f(x)\,dx + \int_{x_L}^{\infty} (x - q_L)^2 f(x)\,dx$$

# Optimización del cuantificador uniforme (1)

El cuantificador óptimo busca optimizar la potencia del ruido de cuantificación, es decir, se busca minimizar $\sigma^2_{e_q}$.

En un **cuantificador uniforme** la potencia del ruido de cuantificación se puede reescribir:

$$\begin{aligned}\sigma^2_{e_q} &= \int_{-\infty}^{-\frac{L\Delta}{2}} \left(x + \frac{L-1}{2}\Delta\right)^2 f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{\frac{L}{2}} \int_{-j\,\Delta}^{-(j-1)\,\Delta} \left(x + \frac{2j-1}{2}\Delta\right)^2 f(x)\,dx \\ &+ \sum_{j=1}^{\frac{L}{2}} \int_{(j-1)\Delta}^{j\,\Delta} \left(x - \frac{2j-1}{2}\Delta\right)^2 f(x)\,dx + \int_{\frac{L\Delta}{2}}^{\infty} \left(x - \frac{L-1}{2}\Delta\right)^2 f(x)\,dx\end{aligned}$$

que solo depende de una variable, $\Delta$.

Para una distribución de probabilidad dada de la señal de entrada se puede obtener la anchura óptima, $\Delta^*$, del intervalo de cuantificación que minimice la potencia del ruido de cuantificación:

$$\frac{d\sigma^2_{e_q}}{d\Delta} = 0 \;\Rightarrow\; \Delta^*$$

Ejemplo de tabla de $\Delta^*$ y de la $\frac{S}{D}$ máxima para los cuantificadores uniformes simétricos en función de $L$ y de la fdp de la señal de entrada (U=uniforme, G=gaussiana, L=laplaciana, $\Gamma$=gamma):

| Número de intervalos | $\Delta^*/\sigma_x$ | | | | máx $\frac{S}{D}$ [dB] | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | U | G | L | $\Gamma$ | U | G | L | $\Gamma$ |
| 2 | 1,7320 | 1,5956 | 1,4142 | 1,1547 | 6,02 | 4,40 | 3,01 | 1,76 |
| 4 | 0,8660 | 0,9957 | 1,0874 | 1,0660 | 12,04 | 9,25 | 7,07 | 4,95 |
| 8 | 0,4330 | 0,5860 | 0,7309 | 0,7957 | 18,06 | 14,27 | 11,44 | 8,78 |
| 16 | 0,2165 | 0,3352 | 0,4610 | 0,5400 | 24,08 | 19,38 | 15,96 | 13,00 |
| 32 | 0,1083 | 0,1881 | 0,2800 | 0,3459 | 30,10 | 24,57 | 20,60 | 17,49 |
| 64 | 0,0541 | 0,1041 | 0,1657 | 0,2130 | 36,12 | 29,83 | 25,36 | 22,16 |
| 128 | 0,0271 | 0,0569 | 0,0961 | 0,1273 | 42,14 | 35,13 | 30,23 | 26,99 |
| 256 | 0,0135 | 0,0308 | 0,0549 | 0,0743 | 48,17 | 40,34 | 35,14 | 31,89 |

# Optimización del cuantificador uniforme (2)

**Potencia de ruido de cuantificación para el cuantif. uniforme**.
Supongamos:

- señal de amplitudes distribuidas uniformemente en el intervalo $[a, b]$
  $\Rightarrow$ sin ruido de sobrecarga;
- cuantific. uniforme de $L$ IC (niveles) de amplitud $\Delta$ y valores de decisión

$$x_1 = a \quad , \quad x_2 = a + \Delta \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_{L+1} = a + L\Delta = b$$

  $\Rightarrow$ anchura del intervalo de cuantificación: $\Delta = (b - a)/L$;
- valores de reconstrucción en $\Delta/2$ (en la mitad del intervalo).

La potencia del ruido granular para cada intervalo de forma individualizada tendrá el mismo valor en todos ellos:

$$\sigma^2_{e_q(x|Q_i)} = \int_{x_i}^{x_i+\Delta} \left(x - \left(x_i + \frac{\Delta}{2}\right)\right)^2 f(x|Q_i)\, dx = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} z^2 \frac{1}{\Delta}\, dz = \frac{1}{\Delta} 2 \frac{(\Delta/2)^3}{3} = \frac{\Delta^2}{12}$$

$\equiv$ varianza de una variable aleatoria con distrib. uniforme de amplitud en $\Delta$.

La potencia del ruido de cuantificación será:

$$\sigma^2_{e_q} = \sum_{i=1}^{L} P_i\, \sigma^2_{e_q(x|Q_i)} = \frac{\Delta^2}{12}$$

donde $P_i$ es la probabilidad del intervalo $i$.

La potencia del ruido de cuantificación depende del tamaño de $\Delta$. Cuanto más pequeño, menor será $\sigma^2_{e_q}$.

Esta fórmula resulta válida para cualquier distribución si se cumple:

- $L \rightarrow \infty$;
- ruido de sobrecarga despreciable;
- distribución $f(x)$ suave (fdp continua)
  (Para pequeños intervalos de cuantificación, la suavidad de la distribución nos permite aproximar esta, dentro de cada intervalo, por una distribución uniforme, a la que se podrá aplicar la expresión anterior)

# Optimización del cuantificador uniforme (3)

La fórmula anterior, $\sigma_{e_q}^2 = \frac{\Delta^2}{12}$, nos sirve para ver la **relación entre distorsión de cuantificación y número de bits.**

Sea:

- señal con rango de variación de amplitud $[a, b]$;
- número $L$ (grande) de niveles de cuantificación;
- codificación mediante código de longitud fija
  $\Rightarrow m[\text{bit}] = \lceil \log_2 L \rceil \quad ; \quad L[\text{nº IC}] = 2^m$
  (suponemos que el nº de IC, $L$, es potencia de 2)

Relación señal a ruido de cuantificación:

$$\frac{s}{d} = \frac{s}{\dfrac{\Delta^2}{12}} = \frac{s}{\dfrac{[(b-a)/2^m]^2}{12}} = \frac{s}{(b-a)^2/12}\, 2^{2m} = k\, 2^{2m}$$

$$\frac{S}{D} = 10 \log k + 20 m \log 2 \approx 10 \log k + 6m \text{ [dB]}$$

Cada **bit adicional** supone un **aumento de 6 dB** en S/D.

Interpretación:

- Cada bit adicional reduce a la mitad $\Delta$ (la anchura de los I.C.);
- $\sigma_{e_q}^2$ (la potencia del ruido de cuantificación) es proporcional a $\Delta^2$

$\Rightarrow \sigma_{e_q}^2$ se reduce a la cuarta parte (es decir, 6 dB).

# Optimización del cuantificador no uniforme

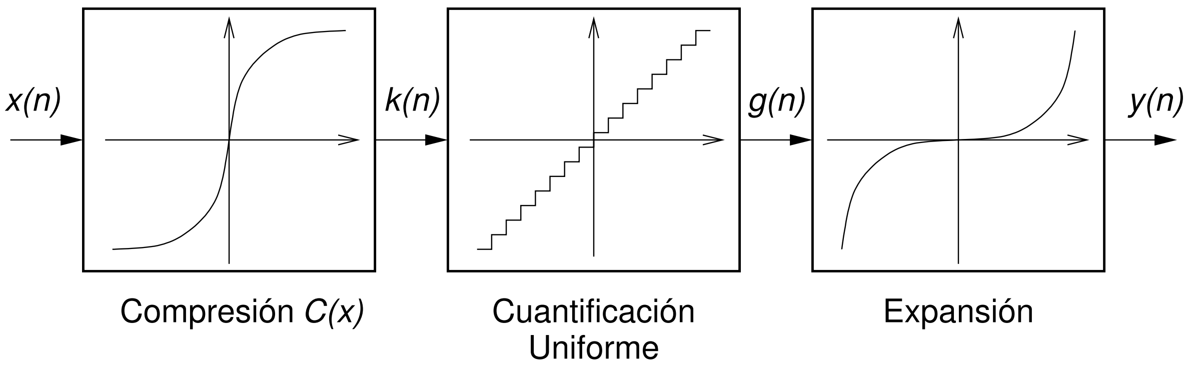
El cuantificador óptimo busca minimizar $\sigma^2_{e_q}$.

En el **cuantificador no uniforme** se complica la optimización.

Hay que optimizar con respecto a:

- $L$ valores de reconstrucción y
- $L-1$ valores de decisión.

El cuantificador no uniforme se puede modelar como:




Ahora la optimización del cuantificador depende de la función de compresión $C(x)$, pudiéndose encontrar una que minimice el ruido de cuantificación en función de la fdp de $x$, existiendo para un número grande de intervalos de cuantificación una expresión analítica de $C(x)$ que minimice la potencia.

# Cuantificación robusta

Un caso más interesante en cuantificación no uniforme es la **cuantificación robusta**. No se optimiza la potencia del ruido de cuantificación, sino que se busca una relación señal a distorsión del cuantificador constante independientemente de la distribución de probabilidad de $x$:

$$\frac{s}{d} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{e_q}^2} = \text{cte}$$

Se llega a que la función de compresión es del tipo:

$$C(x) = c + k \ln x$$

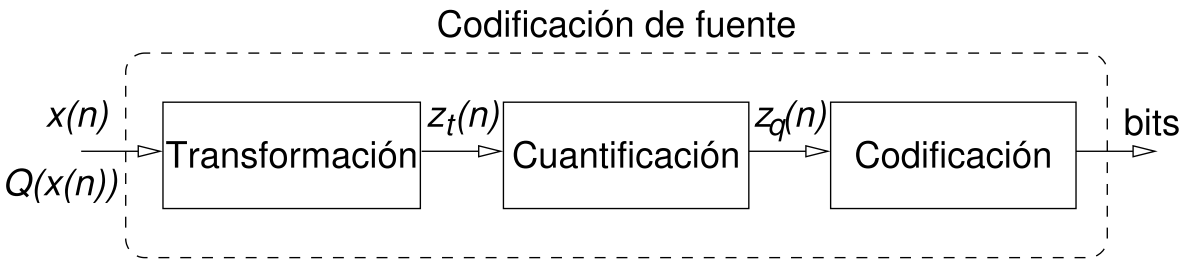
Sustituyendo por una recta para $x$ pequeños para evitar la singularidad en el origen, y extendiendo simétricamente para estar definida en valores negativos, queda:

$$C(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{1+\ln A}x & |x| \leq \frac{1}{A} \\ \operatorname{sgn}(x)\dfrac{1+\ln A|x|}{1+\ln A} & |x| \geq \frac{1}{A} \end{cases}$$

Dos ejemplos de este tipo de cuantificadores son los de Ley A y Ley $\mu$ usados en los sistemas MIC de norma europea y americano-japonesa respectivamente.

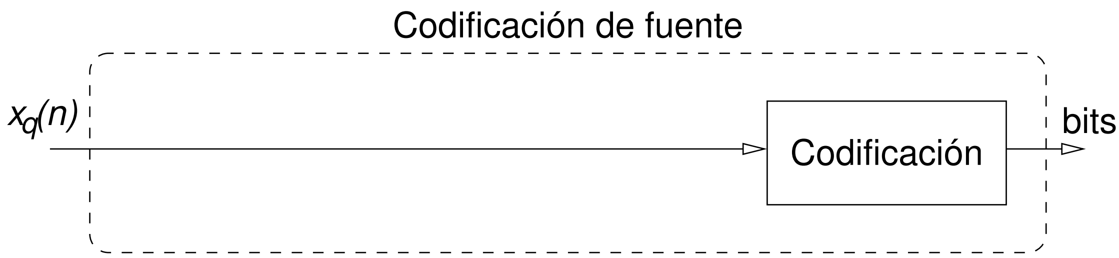
# Módulo de codificación de fuente (1)

Esquema muy general de codificación de fuente. La entrada son muestras previamente cuantificadas y reconstruidas o no:




P.ej.: codificación JPEG para imágenes.

En el caso más sencillo solo hay etapa de codificación. La entrada son etiquetas del cuantificador:




P.ej.: codificación MIC (codificación con código de longitud fija).

Bloques del esquema general:

- **Transformación**: Representa la señal de una forma alternativa en la que:
  - la posterior etapa de cuantificación sea más eficaz (**eliminación de redundancia estadística**) al compactar la energía en unos pocos coeficientes (**descorrelaciona** la señal original);
  - la información perceptualmente poco relevante aparezca separada de la de más importancia (**eliminación de redundancia perceptual**).

  Normalmente es reversible.

# Módulo de codificación de fuente (2)

- **Cuantificación**: Reduce el número de valores que puede tomar cada muestra de la señal transformada.
  Es distinto del usado en la conversión A/D, que cuantificaba las muestras de la señal analógica. Este cuantifica las muestras de la señal transformada.
  No es reversible.
- **Codificación**: Representa la secuencia de etiquetas de cuantificación como sucesión de bits. Si es de forma eficiente → codificación estadística.
  La implementación más clásica es la codificación de longitud variable (VLC). P.ej.: Huffman.
  Es reversible.

**Dos tipos de codificación de fuente**:

- **Sin pérdidas**: Es reversible. En este caso no incluye cuantificación. Problemas:
  - Poca compresión.
  - No se puede garantizar el grado de compresión.
- **Con pérdidas**: Grado de compresión deseado a cambio de una pérdida de información.

# La señal de audio

**Sonido**: Vibración mecánica que se transmite en un medio elástico, usualmente el aire, y que es susceptible de ser detectada por el oído humano.

**Señal de audio en general**: Estructura compleja. Demasiado general.

Tipo de análisis:

- **En el dominio de la frecuencia**: Estudio de la distribución de la energía en frecuencia.
  $\Rightarrow$ Análisis de los efectos de la limitación en banda.
- **En el dominio del tiempo**: Estudio de potencia media considerando intervalos de distinta duración.
  $\Rightarrow$ Análisis de carga de circuitos.

**Análisis en el dominio de la frecuencia**:

- Energía entre, aprox., 20 Hz y 20 kHz.
- Pico de energía de 200 Hz a 600 Hz.
- Rango dinámico de 75 a 80 dB.

**Ejemplos de calidad de audio** atendiendo al ancho de banda:

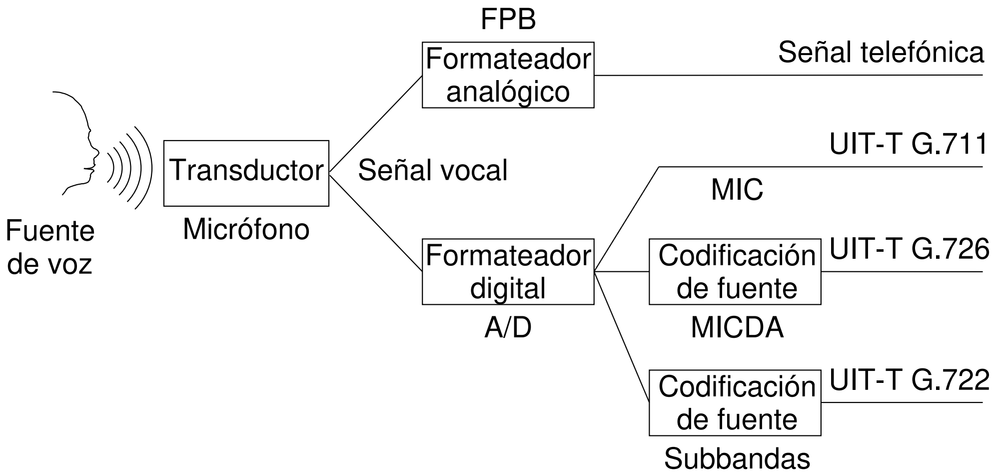
- Banda vocal estrecha: 4 kHz.
- Banda vocal ancha: 7 kHz.
- Banda ancha monoaural: 7 kHz , 15 kHz.
- Banda ancha estéreo: dos canales; $2 \times 15$ kHz, $2 \times 20$ kHz.
- Banda ancha multicanal: p.ej., hasta seis canales en la norma MPEG-2 (izqdo., dcho., central, de ambiente izqdo. y dcho., de baja frecuencia).

# Representación digital de la señal de audio (1)

Varias maneras de representar la señal de audio de forma digital:

- MIC de voz (telefónico).
- MIC de audio (CD / consumo).
- Codificación predictiva (MICD).
- Codificación por subbandas.
- ...

Algunas posibilidades de representación de la señal de voz:




Frecuencias de muestreo:

- Telefonía:
  - 8 kHz → banda estrecha.
  - 16 kHz → banda ancha.
- Audio:
  - 48 kHz → producción, tratamiento, intercambio.
  - 44,1 kHz → CD / consumo.
  - 32 kHz → transmisión.

# Representación digital de la señal de audio (2)

La calidad del audio digital depende de la señal analógica que se digitaliza:

- Ancho de banda
- Rango dinámico

y de las características de la digitalización:

- Muestreo
- Cuantificación (distorsión de cuantificación)
- Codificación (distorsión de codificación).

La calidad de MIC se suele tomar como referencia cuando tiene los parámetros adecuados, por ejemplo:

| | Rango de frec. (Hz) | Frecuencia muestreo (kHz) | MIC (b/muestra) | Velocidad MIC (kb/s ) |
|---|---|---|---|---|
| Voz teléfono (b.e.) | 300 – 3 400 | 8 | 8 | 64 |
| Voz banda ancha | 50 – 7 000 | 16 | 14 | 224 |
| Audio estéreo banda ancha | 10 – 20 000 | 48 | $2 \times 16$ | $2 \times 768 = 1\,536$ |
| Audio estéreo banda ancha | 10 – 20 000 | 44,1 | $2 \times 16$ | $2 \times 705{,}6 = 1\,411$ |

Algoritmos utilizados para compresión: predicción lineal, codificación por subbandas, codificación de transformadas, cuantificación vectorial, codificación predictiva, . . .

Compresión actual para una calidad entre buena y excelente:
voz $\rightarrow$ 1 b/muestra.
audio $\rightarrow$ 2 b/muestra.

# Representación digital de la señal de audio (3)

Ejemplos:

- **Audio digital sin compresión**:
  La referencia a este respecto es la norma **CD**: 44,1 kmuestra/s, 16 b/muestra (cuantificación uniforme), estéreo
  $\Rightarrow R = 2 \times 44{,}1 \times 16 = 1{,}41$ Mb/s.
  Utilizado en grabación (CD, DAT).
- **Audio digital a 44,1 kHz comprimido para grabación**:
  **MiniDisc**: 292 kb/s.
  **DCC**: 384 kb/s.
- **Audio digital en TV analógica**:
  El sistema NICAM-728 transmite audio con calidad inferior a la del CD: 32 kmuestra/s, 14 b/muestra, estéreo.
  Compresión a 10 b/muestra (cuantificación adaptativa)
  $\Rightarrow R = 2 \times 32 \times 10 = 640$ kb/s (+tara=728 kb/s).

También hay que tener en cuenta, desde el punto de vista de la transmisión, no solo la velocidad binaria a la salida del codificador de fuente, sino también la del codificador de canal y del codificador de línea.

Velocidades binarias de algunos dispositivos de almacenamiento de audio (estéreo muestreado a 44,1 kHz):

| | Velocidad audio | Velocidad redundancia | Velocidad total |
|---|---|---|---|
| Compact Disc (CD) | 1,41 Mb/s | 2,91 Mb/s | 4,32 Mb/s |
| Digital Audio Tape (DAT)* | 1,41 Mb/s | 1,67 Mb/s | 3,08 Mb/s |
| Digital Compact Cassette (DCC) | 384 kb/s | 384 kb/s | 768 kb/s |
| Mini Disc (MD) | 292 kb/s | 718 kb/s | 1,01 Mb/s |

(*) DAT también soporta muestreos a 32 y 48 kHz.

# El sistema MIC (1)

Sistema de cuantificador no uniforme más codificador de fuente de longitud fija (asigna palabras de un código de longitud fija a las etiquetas del cuantificador).

Rec. UIT-T G.711:
"Modulación por impulsos codificados (MIC) de frecuencias vocales".

Es el sistema de **Modulación por Impulsos Codificados (MIC)** (*Pulse Code Modulation* - PCM) utilizado en telefonía.

Solo se describirá la versión europea (con Ley A).

**Muestreo**: 8 kmuestras/s, tras un filtrado que limita la señal a la banda de hasta 3400 Hz.

**Cuantificación**: No uniforme para que la relación S/D sea aproximadamente independiente de la amplitud de la señal. Tiene 256 IC.

**Codificación de fuente**: 8 bits por muestra que representan el número del intervalo, invirtiendo posteriormente los bits pares (para evitar largas secuencias de ceros con el canal en reposo).

Un tono de nivel 3,14 dBm0 expande completamente el cuantificador (se corresponde con una entrada de 1 UTN a la entrada del cuantificador).

# El sistema MIC (2)

## Cuantificación

- Para conseguir una relación $S/D$ aproximadamente independiente de la amplitud de la señal se hace una aproximación de la Ley A por tramos rectilíneos.
- El rango dinámico considerado se divide en 13 segmentos simétricos respecto al origen ($2 \times 6 + 1$ segmentos), y de distinta anchura (amplitud).
- Cada segmento normal está dividido en 16 intervalos de cuantificación (IC). El más cercano a cero tiene 32 IC $\times$ 2 (parte negativa y positiva).
- Disposición y numeración de los intervalos:
  Los intervalos están dispuestos de tal manera que el cero es un nivel de decisión (sin corte central).
  Los intervalos se numeran a partir del cero en cada sentido.

## Codificación de fuente

- Los intervalos se codifican mediante un bit de signo (negativo: "0"; positivo: "1") y siete bits que indican el número del intervalo, es decir:

| | menor IC en valor absoluto | | | mayor IC en valor absoluto |
|---|---|---|---|---|
| Semieje positivo: | 1000 0000, | 1000 0001, | ..., | 1111 1111 |
| Semieje negativo: | 0000 0000, | 0000 0001, | ..., | 0111 1111 |

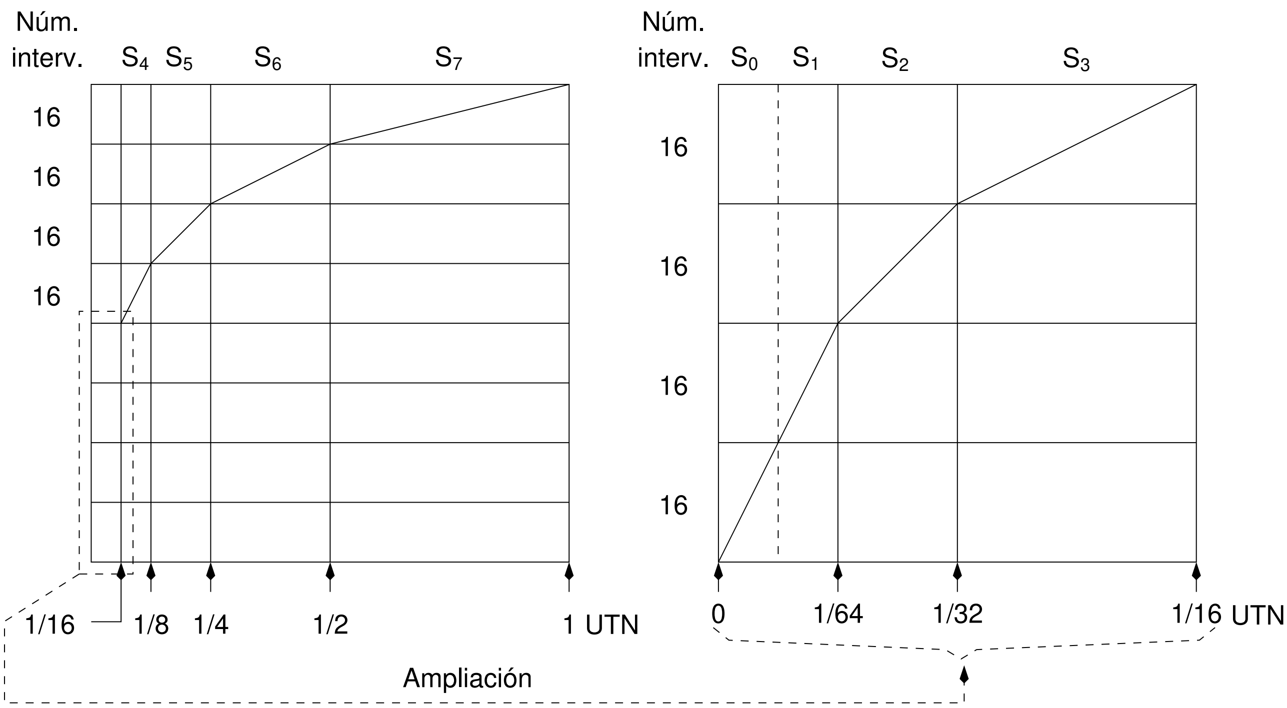
# El sistema MIC (3)

## Especificación de los segmentos

La gráfica representa la parte positiva de una aproximación por tramos rectilíneos de la **ley A**:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1+\ln A|x|}{1+\ln A}\ \operatorname{sgn}(x) & \frac{1}{A} \le |x| \le 1 \\[2ex] \dfrac{A\,x}{1+\ln A} & 0 \le |x| \le \frac{1}{A} \end{cases}$$

donde $A = 87{,}6$ para 13 tramos rectilíneos.




UTN = Unidad de Tensión Normalizada

$$x(n)\ [\text{UTN}] = \frac{x(n)\ [\text{V}]}{V_{\text{sob}}\ [\text{V}]}$$

1 UTN $\equiv$ valor de sobrecarga.

En EE. UU. se usa una expresión diferente denominada **ley $\mu$.**

# El sistema MIC (4)

## Especificación de los segmentos

Sobre la gráfica anterior, se divide cada segmento del eje vertical en 16 intervalos de cuantificación.

Los intervalos sobre el eje horizontal se obtienen proyectando los intervalos del eje vertical mediante la gráfica de la aprox. por tramos rectilíneos.

| Segmento | $S_0$ / $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ | $S_6$ | $S_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Amplitud IC: ($\Delta_i$) | $\frac{1}{2^7} \cdot \frac{1}{2^4}$ | $\frac{1}{2^6} \cdot \frac{1}{2^4}$ | $\frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{2^4}$ | $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^4}$ | $\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^4}$ | $\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^4}$ | $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^4}$ |

- Amplitud del intervalo más pequeño: $\Delta_{min} = (1/128)/16 = 1/2^{11}$ UTN
  equivale a tener la precisión de un cuantif. uniforme de (signo + 11 b) = 12 bits
- Amplitud del intervalo más grande: $\Delta_{max} = (1/2)/16 = 1/2^5$ UTN
  equivale a tener la precisión de un cuantif. uniforme de (signo + 5 b) = 6 bits
- Valor de reconstrucción a mitad del intervalo (en $\Delta_i/2$).

  Valor de reconstrucción del primer intervalo del semieje positivo:

$$\frac{\Delta_{min}}{2} = \frac{1}{2^{12}} \quad \text{UTN}$$

Ejemplo de implementación práctica:

- cuantificación a través de una cuantificación uniforme de 12 bits seguida de compresión a 8 bits;
- reconstrucción a través de una expansión de 8 a 13 bits.

# El sistema MIC (5)

## Algoritmo de cuantificación

1. Expresar el valor de tensión de entrada en UTN ($V/V_{max}$).
2. Calcular el número de intervalo que correspondería si todos los intervalos de cuantificación tuvieran la amplitud de los intervalos más finos
   $\Rightarrow$ cuantificación uniforme de 12 bits (signo + 11 b)
   $\Rightarrow$ cuantificador de $1/\Delta_{min} = 2^{11}$ niveles en cada semieje.
   La cuantificación consiste en dividir entre $\Delta_{min}$ (es decir, multiplicar por $2^{11}$=2048) y quedarnos con la parte entera.
   Se codifica en binario con 1+11 bits.
3. Transcodificar de uniforme de 12 bits a Ley A de 8 bits.

| Signo | $\#IC_{12b}$ | | Signo | #Seg | $\#IC_{8b}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| S | 000 0000 abcd | $\Rightarrow$ | S | 000 | abcd |
| S | 000 0001 abcd | $\Rightarrow$ | S | 001 | abcd |
| S | 000 001a bcd* | $\Rightarrow$ | S | 010 | abcd |
| S | 000 01ab cd** | $\Rightarrow$ | S | 011 | abcd |
| S | 000 1abc d*** | $\Rightarrow$ | S | 100 | abcd |
| S | 001 abcd **** | $\Rightarrow$ | S | 101 | abcd |
| S | 01a bcd* **** | $\Rightarrow$ | S | 110 | abcd |
| S | 1ab cd** **** | $\Rightarrow$ | S | 111 | abcd |

S: Bit de signo (positivo = 1; negativo = 0).
$\#IC_{12b}$: Nº de intervalo en cuantificación uniforme de 12 bits.
#Seg: Nº de segmento.
$\#IC_{8b}$: Nº de intervalo dentro del segmento en la cuantificación de Ley A de 8 bits.

# Problema 2.1

Sea un cuantificador/codificador MIC de Ley A con valor de sobrecarga situado a 1,5 V (1 UTN $\equiv$ 1,5 V).

1.) ¿Cuáles son los intervalos de cuantificación (IC) con amplitud máxima y mínima del mismo?

Calcular:

2.) La amplitud máxima y mínima, en V, del escalón de cuantificación.

3.) El máximo error de cuantificación en esos IC.

4.) El máximo valor de reconstrucción del cuantificador.

Sea una sinusoide de valor máximo 0,7505 V.

5.) ¿Cuál es su nivel en dBu?

Calcular:

6.) El código MIC de una muestra de esa sinusoide con valor 0,7505 V.

7.) El valor de reconstrucción de esa muestra.

8.) El error de cuantificación de esa muestra.

# Problema 2.2

Sea un cuantificador MIC de ley A de 8 bits, del que se sabe que el máximo error de cuantificación, sin llegar a la sobrecarga, es de 0,1 V. Se pide:

1.) Calcular el valor de sobrecarga en V.

2.) Definiendo una hipotética relación S/D como: $20 \log \left| \frac{\text{valor de la muestra orig.}}{\text{error de cuantificación}} \right|$, calcular los valores máximo y mínimo de la misma.

3.) Calcular la palabra MIC (ley A) correspondiente a una muestra de valor 0,2 UTN.

4.) Calcular el valor de reconstrucción, en UTN, correspondiente a la palabra MIC (ley A) 0101 0100.

5.) Volviendo a considerar que el máximo error de cuantificación, sin llegar a la sobrecarga, es de 0,1 V, calcular el nuevo valor de sobrecarga, en V, si el cuantificador fuera uniforme en vez de uno de ley A.
(Suponer el valor de reconstrucción en $\Delta/2$)

# Problema 2.3

Calcular la velocidad binaria nominal y sus límites de variación para los sistemas MIC que se indican a continuación si se considera una frecuencia de muestreo de 8 kHz y una tolerancia global de $\pm$ 50 partes por millón (ppm).

1.) Rec. UIT-T G.732 (norma europea) de 30+2 canales de 8 bits.

2.) Rec. UIT-T G.733 (norma americana) de 24 canales de 8 bits + un bit de alineación de trama.

# Problema 2.4

Se tiene una señal de vídeo digital de velocidad binaria $v_b = 2048$ kb/s que se desea transmitir por un sistema que hace uso de una modulación 16-PAM (con 16 niveles de amplitud). La máxima velocidad de transmisión de señales que permite este sistema es $v_t = 20$ kbaudios.

1.) Comprobar si es posible transmitir la señal de vídeo por el sistema.

Para comprimir la señal de vídeo se dispone de un codificador de fuente ITU-T H.264 con una relación de compresión 30:1.

2.) Calcular la velocidad binaria a la salida del codificador de fuente y comprobar si es posible transmitir la señal de vídeo por el sistema.

Para proteger la información frente a errores de transmisión, se hace uso de un codificador de canal de dos etapas formado por un codificador Reed-Solomon RS(32,28) seguido por un codificador convolucional que introduce un 10 % de redundancia.

3.) Calcular la velocidad binaria bruta a la salida del codificador de canal y comprobar si es posible transmitir la señal de vídeo por el sistema.

4.) Calcular la máxima velocidad binaria neta que admitiría el sistema.

5.) Dibujar la cadena de transmisión del sistema descrito, indicando la denominación de la velocidad que hay a la salida de cada módulo, y su valor, para una velocidad binaria de entrada $v_b = 1$ Mb/s.

# Problema 2.5

Sea un cuantificador uniforme que cubre el rango de muestras de entrada $x(n) \in [0\ ,8]$ V con 4 IC numerados forma ordenada desde el $\mathrm{IC}_0$ (valores cercanos a 0 V) al $\mathrm{IC}_3$ (valores cercanos a 8 V).

Se usa un codificador de longitud fija que representa en binario, con el menor número de bits, el número del IC.

Se pide calcular:

1.) La palabra código de la muestra $x(n) = 2{,}4$ V.

2.) El valor de reconstrucción de la palabra código '11' si la reconstrucción es en $\Delta/2$.

3.) El valor de reconstrucción de la palabra código '10' si la reconstrucción es en el valor inferior del IC.

# Problema 2.6

Sea un cuantificador uniforme simétrico de 3 bits con valores de sobrecarga $V_{\text{sob}}^{\pm} = \pm 8$ V y reconstrucción en $\Delta/2$.

Obtener la palabra código de la muestra $x(n) = -2{,}4$ V si se usa la asignación de bits:

1.) `x xx` = signo ('1' para muestras negativas) + nº de orden del IC alejándose desde el origen (desde $\text{IC}_{\pm 0}$ a $\text{IC}_{\pm 3}$).

2.) `xxx` = nº de orden del IC comenzando a numerar desde las muestras más negativas (desde $\text{IC}_0$ a $\text{IC}_7$).

# Problema S00P1

Tomando como base la aproximación de la Ley A por tramos rectilíneos que se realiza en la Rec. UIT-T G.711 "Modulación por impulsos codificados (MIC) de frecuencias vocales", se desea realizar un sistema similar de cuantificación + codificación, pero más sencillo, que cumpla las siguientes condiciones:

- Solo admite (solo cuantifica y codifica) muestras positivas.
- Cada muestra se codifica con 4 bits (sin inversión de bits pares).

Particularizando para un sistema en que se utilizan 2 bits para especificar el segmento, y 2 bits para especificar el intervalo de cuantificación, se pide:

1.) Dibujar la aproximación de la Ley A siguiendo el mismo mecanismo de especificación de segmentos y de intervalos de cuantificación que en la Rec. UIT-T G.711, pero para **4 bits** (2 de segmento + 2 de I.C.) y existiendo **solo muestras positivas**. Especificar con detalle los segmentos e intervalos de cuantificación.

Sabiendo que el valor de sobrecarga está situado en 2 V, se pide calcular:

2.) La amplitud, en mV, máxima y mínima de los intervalos de cuantificación.

3.) La palabra código correspondiente a una muestra de 0,4 V.

4.) El valor de reconstrucción, en mV, correspondiente a la palabra código 1110.

Volviendo al caso general de sistema en el que solo se admiten muestras positivas, y que cada muestra se codifica con 4 bits (sin ninguna asignación previa de bits entre los segmentos y los I.C.), se pide:

5.) Dibujar el resto de posibles aproximaciones de la Ley A que se pueden realizar, **uniformes** y **no uniformes**, siguiendo el mismo mecanismo de especificación de segmentos y de intervalos de cuantificación que en la Rec. UIT-T G.711. Especificar con detalle los segmentos e intervalos de cuantificación.

# Soluciones (1)

**2.1**

1.) $\varDelta_{max} \Rightarrow$ IC de los segmentos 7 ($\varDelta_7$) ; $\varDelta_{min} \Rightarrow$ IC de los segmentos 0 y 1 ($\varDelta_{0/1}$)

2.) $\varDelta_7 = 1{,}5/2^5$ V ; $\varDelta_{0/1} = 1{,}5/2^{11}$ V

3.) $\varDelta_7/2 = 23{,}438$ mV ; $\varDelta_{0/1}/2 = 366{,}21\ \mu$V

4.) $y(n)_{max} = 1 - (\varDelta_7/2) = 1{,}4766$ V

5.) $L = -3{,}29$ dBu

6.) 1 111 0000

7.) $y(n) = 0{,}773\,437\,5$ V

8.) $q(n) = -0{,}022\,937\,5$ V

**2.2**

1.) $V_{sob} = 6{,}4$ V

2.) $(S/D)_{max} = \infty$ ; $(S/D)_{min} = -\infty$

3.) 1 101 1001

4.) $y(n) = -0{,}160\,156$ UTN

5.) $V_{sob} = 25{,}6$ V

**2.3**

1.) $R = 2{,}048$ Mb/s ; $\varDelta = 102{,}4$ b/s ; $R \pm \varDelta \rightarrow 2\,047\,898$ b/s , $2\,048\,102$ b/s

2.) $R = 1{,}544$ Mb/s ; $\varDelta = 77{,}2$ b/s ; $R \pm \varDelta \rightarrow 1\,543\,923$ b/s , $1\,544\,077$ b/s

**2.4**

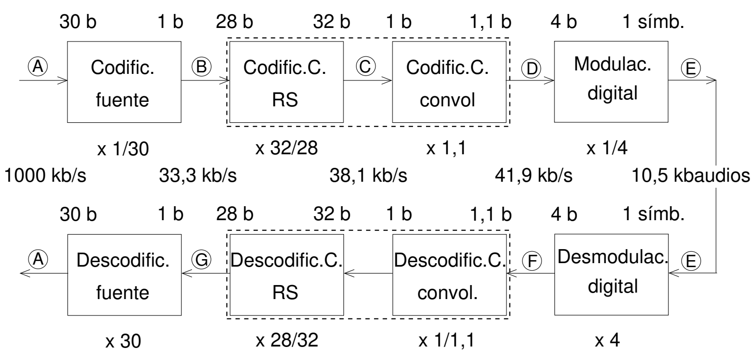
1.) $v_t = 512$ kbaudios $> 20$ kbaudios $\Rightarrow$ NO es posible

2.) $v'_b = 68{,}267$ kb/s ; $v_t = 17{,}07$ kbaudios $< 20$ kbaudios $\Rightarrow$ SÍ es posible

3.) $v''_b = 85{,}82$ kb/s ; $v_t = 21{,}46$ kbaudios $> 20$ kbaudios $\Rightarrow$ NO es posible

4.) $v_{b_{max}} = 1\,909{,}09$ kb/s

5.)




A: velocidad binaria neta, vel. binaria de información, vel. binaria útil.

B: velocidad binaria a la salida del CF.

Si se considera que el sistema de TX comienza a la entrada del codificador de canal, se denomina como A.

C: velocidad binaria a la salida del CC de RS.

D: velocidad binaria bruta, vel. binaria a la salida del CC, vel. binaria total

E: velocidad de transmisión, vel. de símbolos, vel. de señales, vel. de modulación, vel. del modulador.

F: vel. bin. bruta, vel. bin. total, vel. binaria a la salida del desmod., vel. bin. a la entrada del descodif. canal.

G: vel. bin. a la salida del descodif. canal.

Si se considera que el sistema de TX comienza a la entrada del codificador de canal, se denomina como A.

# Soluciones (2)

**2.5**

1.) 01

2.) 7 V

3.) 4 V

**2.6**

1.) 101

2.) 010

**S00P1**

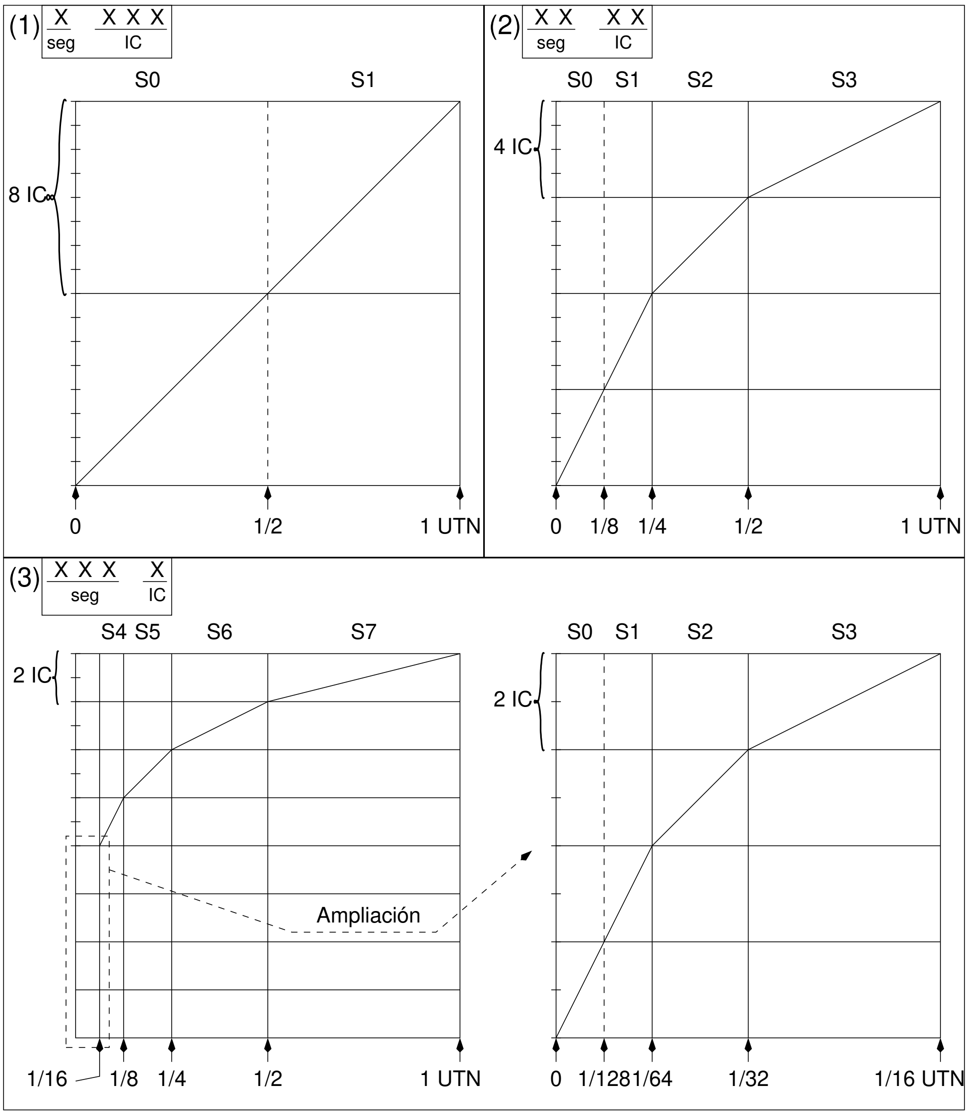
1.) Ver aproximación **(2)** de la pregunta 5.).

2.) $\Delta_{max} = 250$ mV ; $\Delta_{min} = 62{,}5$ mV

3.) 01 10

4.) $y(n) = 1{,}625$ V $= 1{,}625 \cdot 10^3$ mV

5.) No hay parte negativa ⇒ no hay bit de signo.
Respuesta pregunta 1.) ⇒ aproximación **(2)**.
Respuesta pregunta 5.) ⇒ aproximación **(1)**, **(3)**, **(4)** y **(5)**.




**(4)** Reservar los 4 bits para los IC → cuantificación uniforme con 16 IC ≡ aproximación **(1)**.
**(5)** Reservar los 4 bits para los seg. → cuantificación no uniforme con 16 IC con distintas $\Delta$, salvo $\Delta_0 = \Delta_1$.