



# TV: TeleVisión – Plan 2010

## Codificación de subbandas

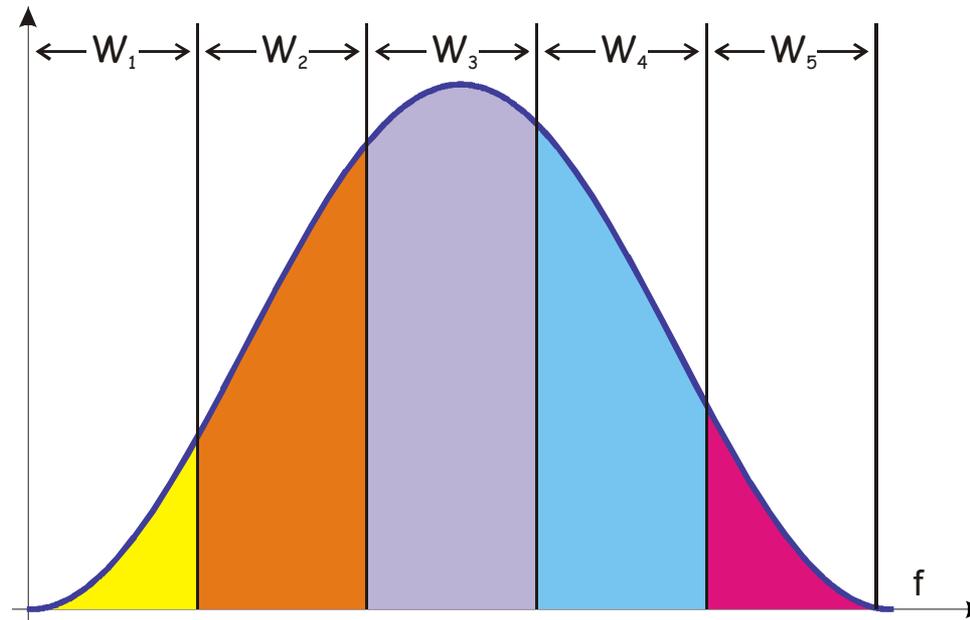


# Codificación de subbandas

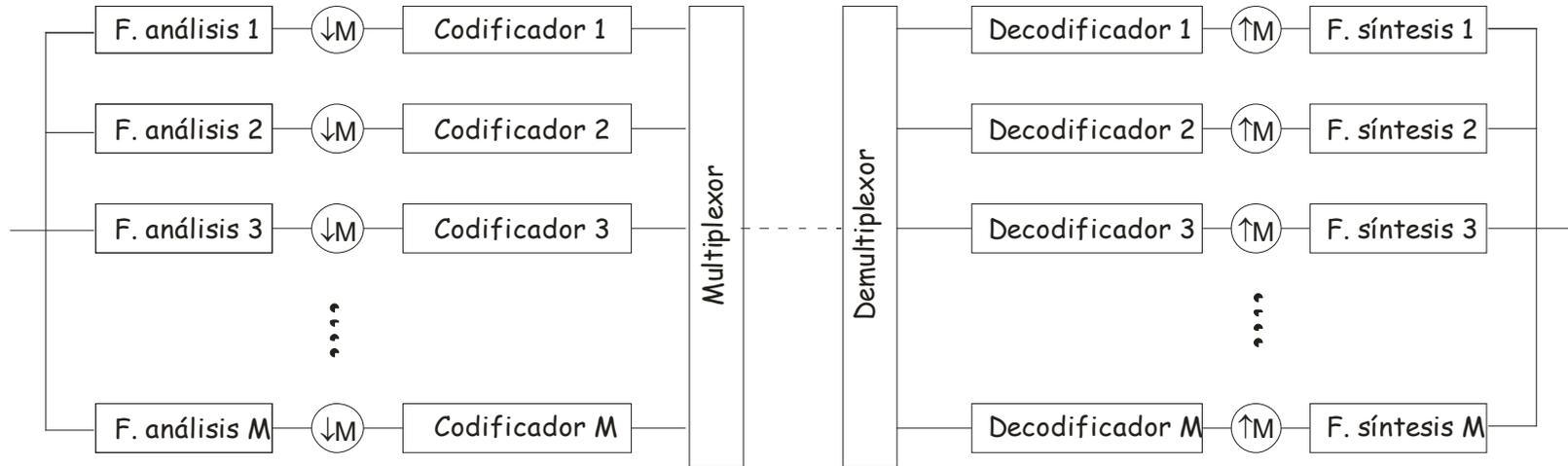
- ★ Introducción
- ★ Operaciones básicas
  - ★ Diezmado
  - ★ Interpolación
- ★ Reconstrucción perfecta con dos subbandas
- ★ Filtros espejo en cuadratura
- ★ Asignación de bits

# Codificación de subbandas

- ★ Técnica en el dominio de la frecuencia
- ★ La señal se divide en subbandas por medio de un conjunto de filtros (banco de filtros de análisis)
- ★ Cada subbanda es muestreada a su frecuencia de Nyquist ( $2W_i$ ) y codificada (por ejemplo de forma diferencial)
- ★ Las bandas con menor importancia pueden codificarse con menor resolución (o incluso no transmitirse)



# Esquema de la codificación de subbandas (I)



- ★ La señal pasa a través de un conjunto de filtros paso banda (banco de filtros de análisis) que cubren el rango de frecuencias de ésta
- ★ Se muestrea la salida de los filtros porque el número de muestras necesario para reconstruir cada banda es más reducido. Este proceso se llama diezmado
- ★ El número de muestras requerido depende del ancho de banda del filtro. El proceso de retener una muestra de cada  $M$  se representa por  $\downarrow M$

## Esquema de la codificación de subbandas (II)

- ★ Las bandas de paso de los filtros pueden solaparse o no
- ★ La salida de cada filtro es cuantificada y codificada usando un esquema de codificación apropiado (por ejemplo ADPCM, cuantificación vectorial, etc.)
- ★ Puesto que bandas diferentes tienen diferente relevancia para el destinatario, cada banda es cuantificada con diferente precisión o incluso eliminada
- ★ La salida de los codificadores es multiplexada y transmitida
- ★ En el receptor se demultiplexa la información recibida y se entrega a cada decodificador
- ★ La salida de cada decodificador es interpolada insertando el número apropiado de ceros entre muestras consecutivas y se lleva a cada filtro de síntesis. Se representa por  $\uparrow M$  el proceso de insertar  $M-1$  ceros entre cada dos muestras consecutivas
- ★ La salida de todos los filtros se combina para obtener la señal reconstruida
- ★ En resumen, la codificación de subbandas está determinada por
  - ✱ Los bancos de filtros de análisis y síntesis
  - ✱ El esquema de cuantificación o asignación de bits
  - ✱ El tipo de codificación empleada



# Operaciones básicas

## Diezmado (M=2)

Sea  $x[n]$  una secuencia, ( $n=\dots-1,0,1,\dots$ ).

Diremos que la secuencia  $y[n]$  se obtiene M-diezmando la secuencia  $x[n]$  si  $y[n]=x[Mn]$ .

La relación entre  $x[n]$  e  $y[n]$  es relativamente fácil de obtener.

Si  $M=2$ :  $\{y[n]\} = \{\dots, x[-4], x[-2], x[0], x[2], x[4], \dots\}$

La transformada de Fourier de la secuencia  $x[n]$  es:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-jn\omega} = \dots + x[-2] \cdot e^{j2\omega} + x[-1] \cdot e^{j\omega} + x[0] + x[1] \cdot e^{-j\omega} + x[2] \cdot e^{-j2\omega} + \dots$$

$$X(e^{j\omega/2}) = \dots + x[-2] \cdot e^{j\omega} + x[-1] \cdot e^{j\omega/2} + x[0] + x[1] \cdot e^{-j\omega/2} + x[2] \cdot e^{-j\omega} + \dots$$

$$X(-e^{j\omega/2}) = \dots + x[-2] \cdot e^{j\omega} - x[-1] \cdot e^{j\omega/2} + x[0] - x[1] \cdot e^{-j\omega/2} + x[2] \cdot e^{-j\omega} + \dots$$

# Diezmado (M=2)

Por otra parte

$$\begin{aligned}
 Y(e^{jw}) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot e^{-jnw} = \\
 &= \dots + y[-2] \cdot e^{j2w} + y[-1] \cdot e^{jw} + y[0] + y[1] \cdot e^{-jw} + y[2] \cdot e^{-j2w} + \dots \\
 &= \dots + x[-4] \cdot e^{j2w} + x[-2] \cdot e^{jw} + x[0] + x[2] \cdot e^{-jw} + x[4] \cdot e^{-j2w} + \dots
 \end{aligned}$$

Luego:

$$X(e^{jw/2}) + X(-e^{jw/2}) = 2Y(e^{jw})$$

$$Y(e^{jw}) = \frac{X(e^{jw/2}) + X(-e^{jw/2})}{2}$$

Teniendo en cuenta que  $X(-e^{jw/2}) = X(e^{jw/2+j\pi}) = X(e^{j(w+2\pi)/2})$

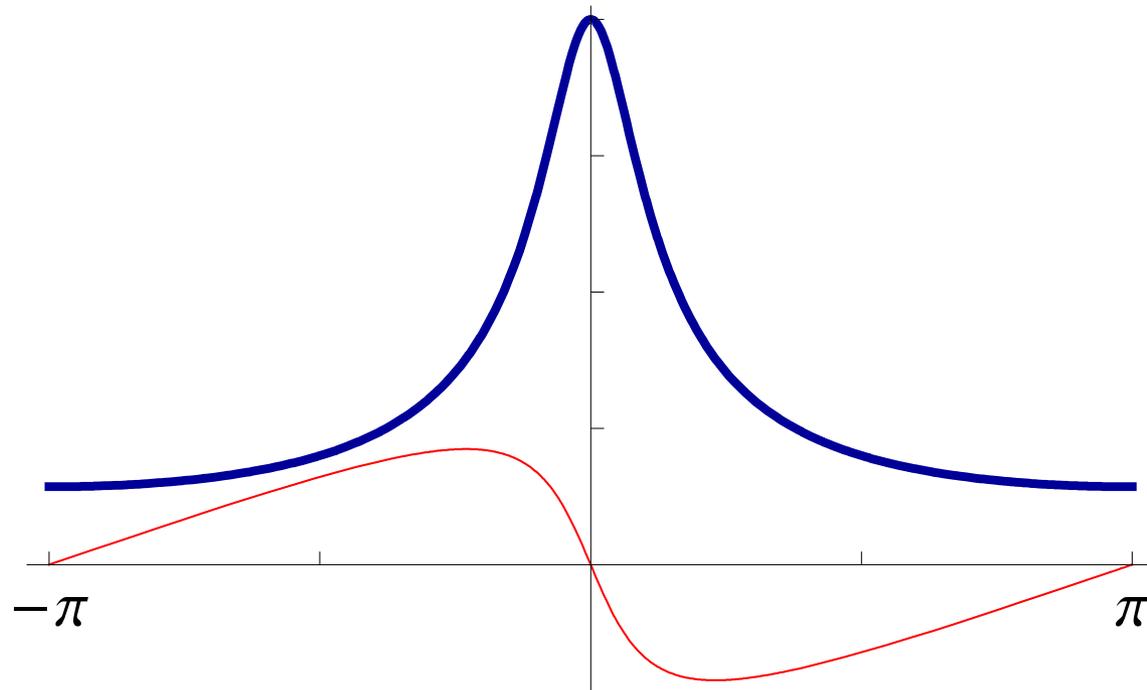
$$Y(e^{jw}) = \frac{1}{2} \left[ X(e^{jw/2}) + X(e^{j(w/2+\pi)}) \right]$$

$$Y(z) = \frac{1}{2} \left[ X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2}) \right]$$

## Diezmado (M=2): Ejemplo

Transformada de Fourier de la secuencia  $x[n] = a^n u[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-jn\omega} = \sum_0^{\infty} a^n e^{-jn\omega} = \sum_0^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$



## Diezmado (M=2): Ejemplo

La secuencia diezmada respetando 1 de cada dos muestras es

$$y[n] = a^{2n}u(n)$$

cuya transformación de Fourier es:

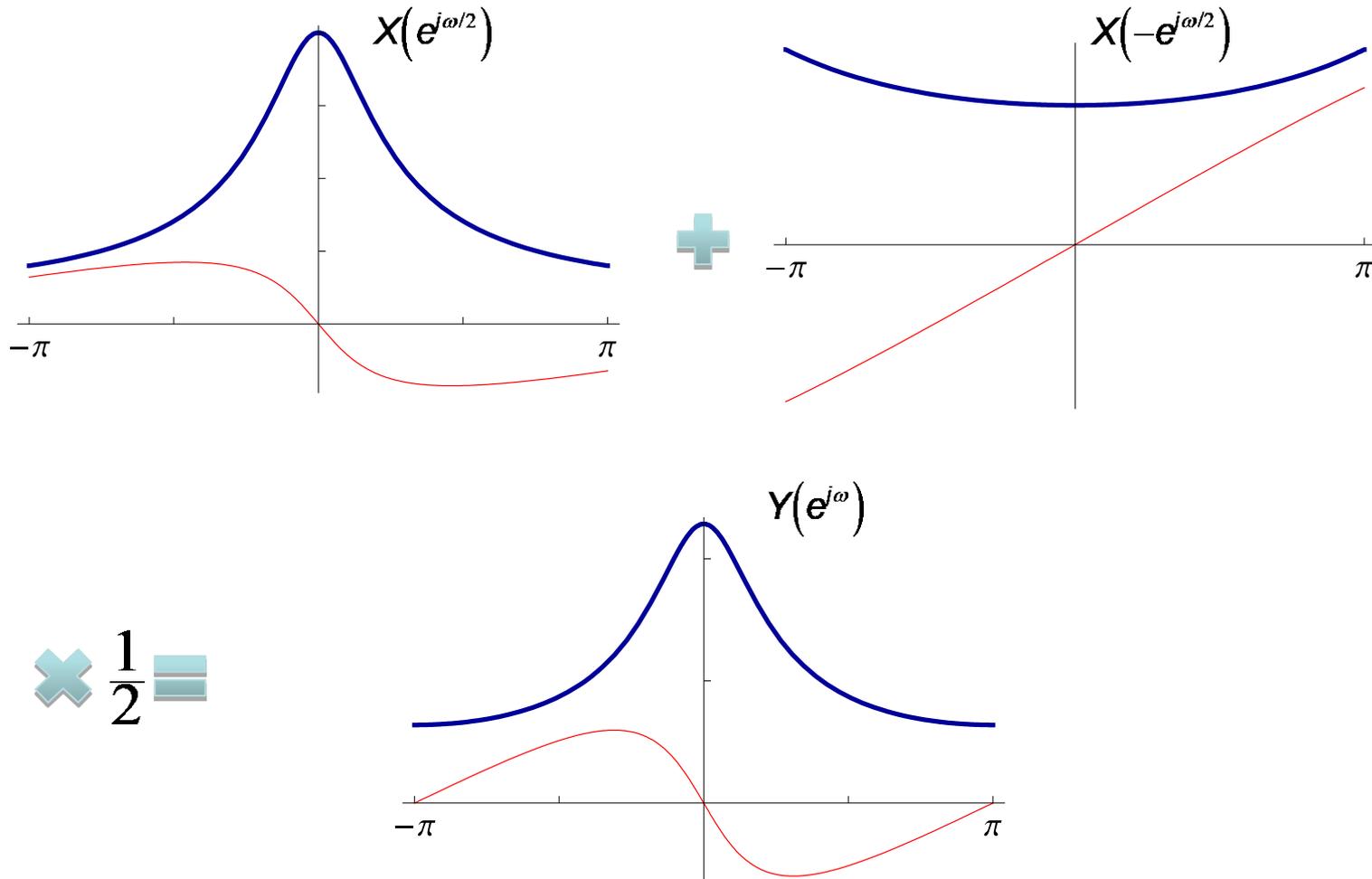
$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} y[n] \cdot e^{-jn\omega} = \sum_0^{\infty} a^{2n} e^{-jn\omega} = \sum_0^{\infty} (a^2 e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - a^2 e^{-j\omega}}$$

que coincide con

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega/2}) + X(-e^{j\omega/2}) &= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega/2}} + \frac{1}{1 + ae^{-j\omega/2}} = \frac{1 + ae^{-j\omega/2} + 1 - ae^{-j\omega/2}}{(1 - ae^{-j\omega/2})(1 + ae^{-j\omega/2})} = \\ &= \frac{2}{1 - (ae^{-j\omega/2})^2} = \frac{2}{1 - a^2 e^{-j\omega}} = 2Y(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

La operación de diezmado produce una compresión en el dominio del tiempo, por lo que cabe esperar una dilatación en el dominio de la frecuencia.

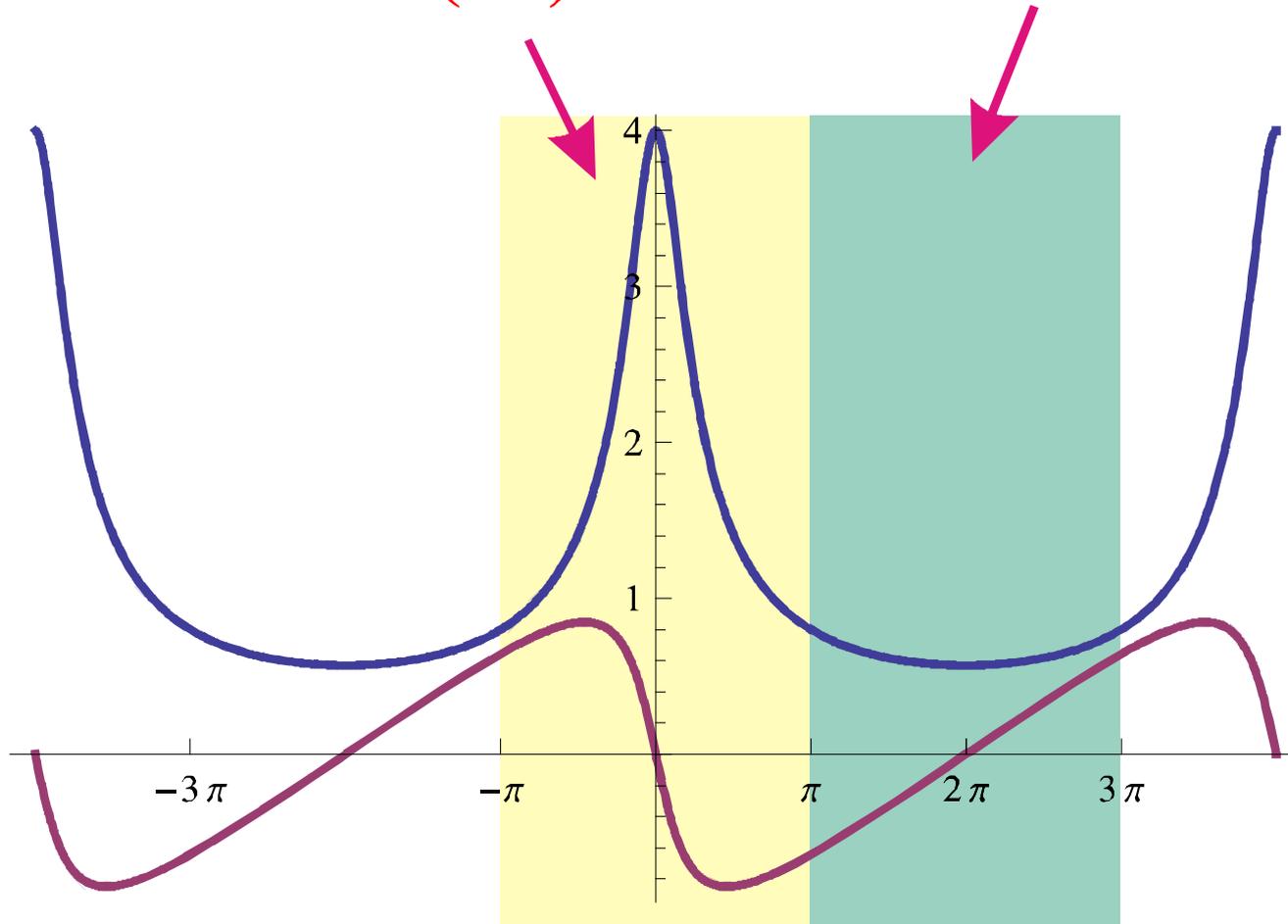
# Diezmado (M=2): Ejemplo



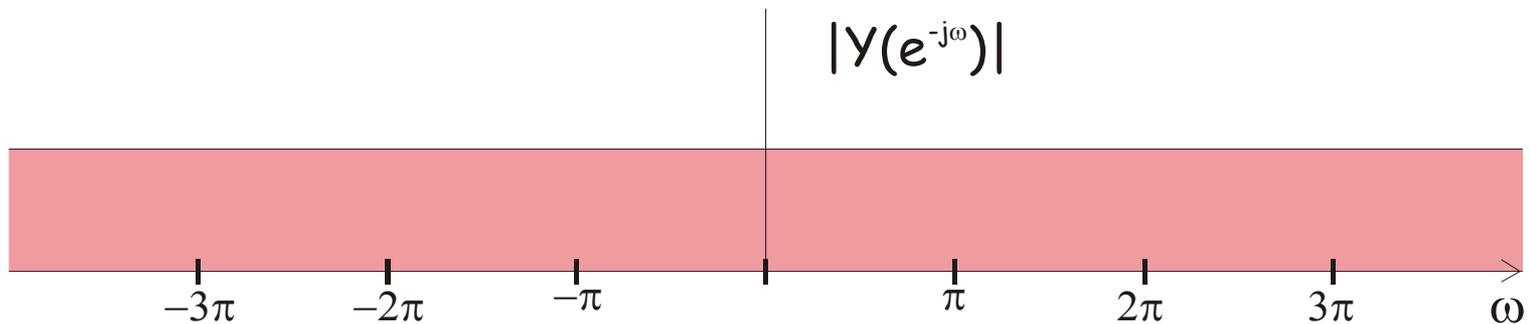
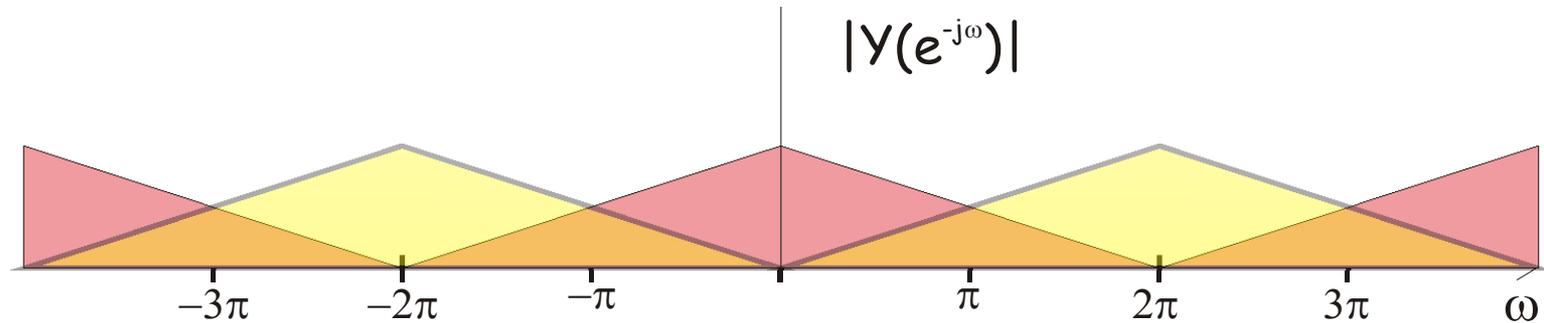
# Diezmado (M=2): Ejemplo

$$X(e^{j\omega/2})$$

$$X(e^{j\omega/2+j\pi}) = X(-e^{j\omega/2})$$



# Diezmado (M=2): Ejemplo



## Diezmado (M arbitrario)

En un diezmado de orden arbitrario la secuencia resultante es

$$y[n]=X[Mn].$$

El espectro correspondiente a esta secuencia se obtiene sumando M copias del espectro de la secuencia de partida, dilatadas en el factor M y desplazadas  $2\pi k/M$  radianes, esto es:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi k}{M}}\right)$$

o en términos de la transformada Z:

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(W_M^k \cdot z^{\frac{1}{M}}\right) \text{ donde } W_M = e^{-j\frac{2\pi}{M}}$$

# Interpolación

La interpolación es, básicamente la operación contraria al muestreo. Un  $M$  interpolador intercala  $M-1$  ceros entre dos muestras adyacentes de la secuencia de partida:

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{M}\right] & \text{si } n = \dot{M} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-Mn} = X(z^M)$$

En consecuencia, la interpolación produce una dilatación en el dominio del tiempo, y, por consiguiente, una compresión en el dominio de la frecuencia.

$$Y(e^{jw}) = X(e^{jwM})$$

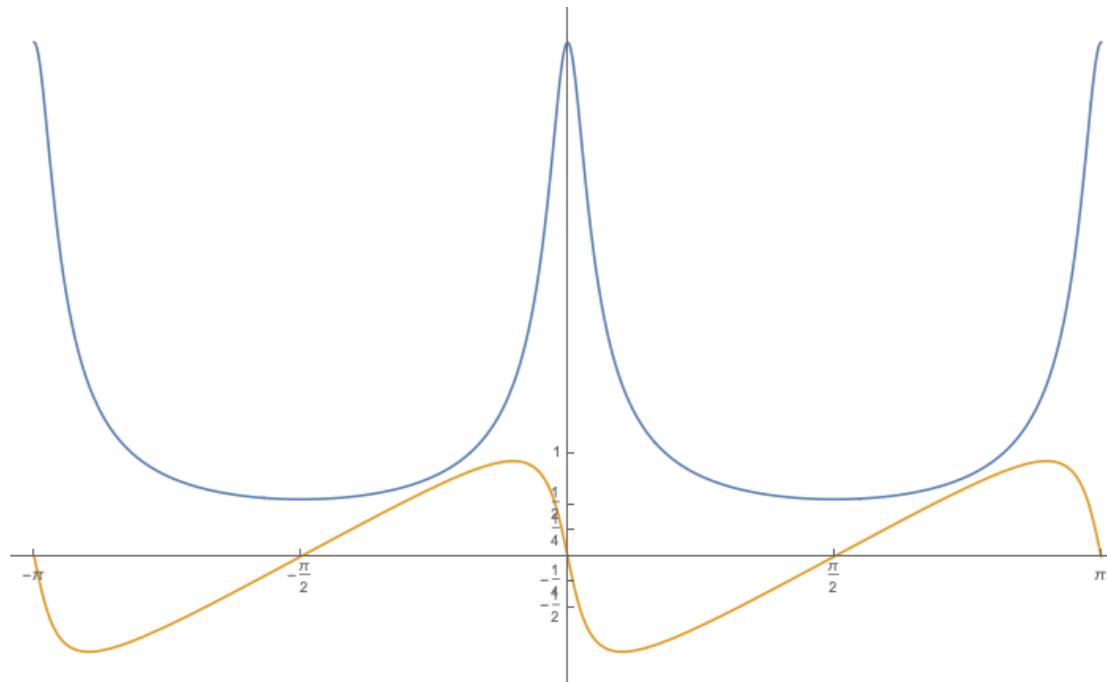
# Interpolación: Ejemplo

Si se interpola la secuencia  $x[n] = a^n u[n]$  con  $M=2$ , la secuencia resultante tiene por transformada:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j2\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{-j2\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j2\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j2\omega}}$$

El espectro es idéntico al obtenido para la secuencia original comprimido en frecuencias por un factor de 2:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega}).$$



## Diezmado + interpolación

Si se aplican consecutivamente procesos de diezmado e interpolación del mismo orden,  $M$ , el resultado no será, en general la señal de partida debido a la aparición de solapamiento (“aliasing”).

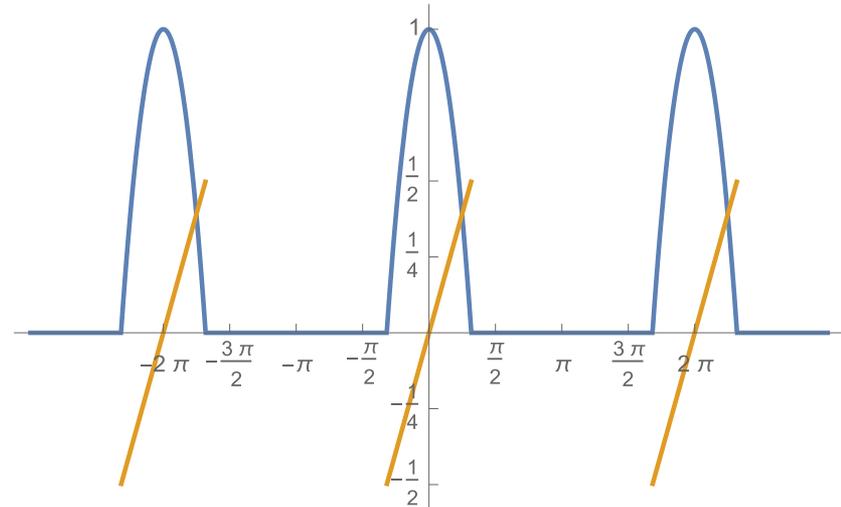
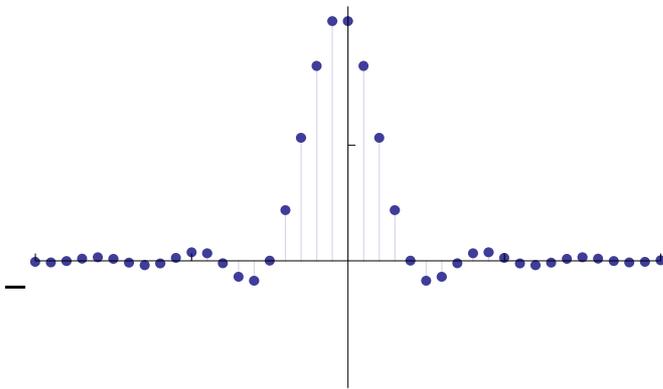
Solamente si la señal de partida está limitada en banda al intervalo  $(-\pi/M, \pi/M)$ , se dispondrá después del proceso de copias del espectro de partidas libres de distorsión.

Este fenómeno se ilustra en la figura donde las áreas sombreadas originarán distorsión de solapamiento, haciendo imposible recuperar la señal de partida.

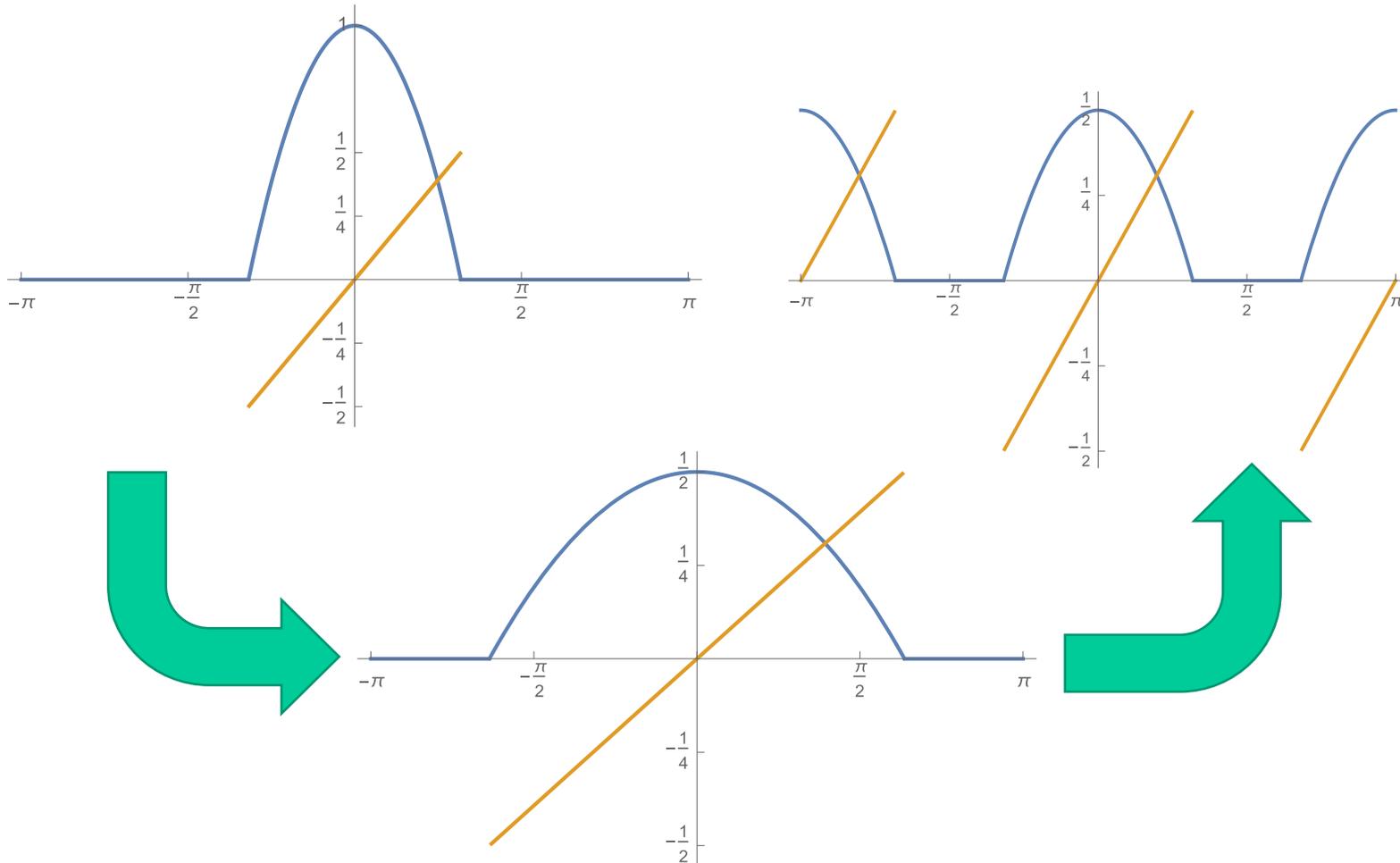
# Ejemplos de diezmado + interpolación

$$x[n] = -8 \frac{(1+2n) \cos(1/2+n) - 2 \sin(1/2+n)}{(1+2n)^3 \pi}$$

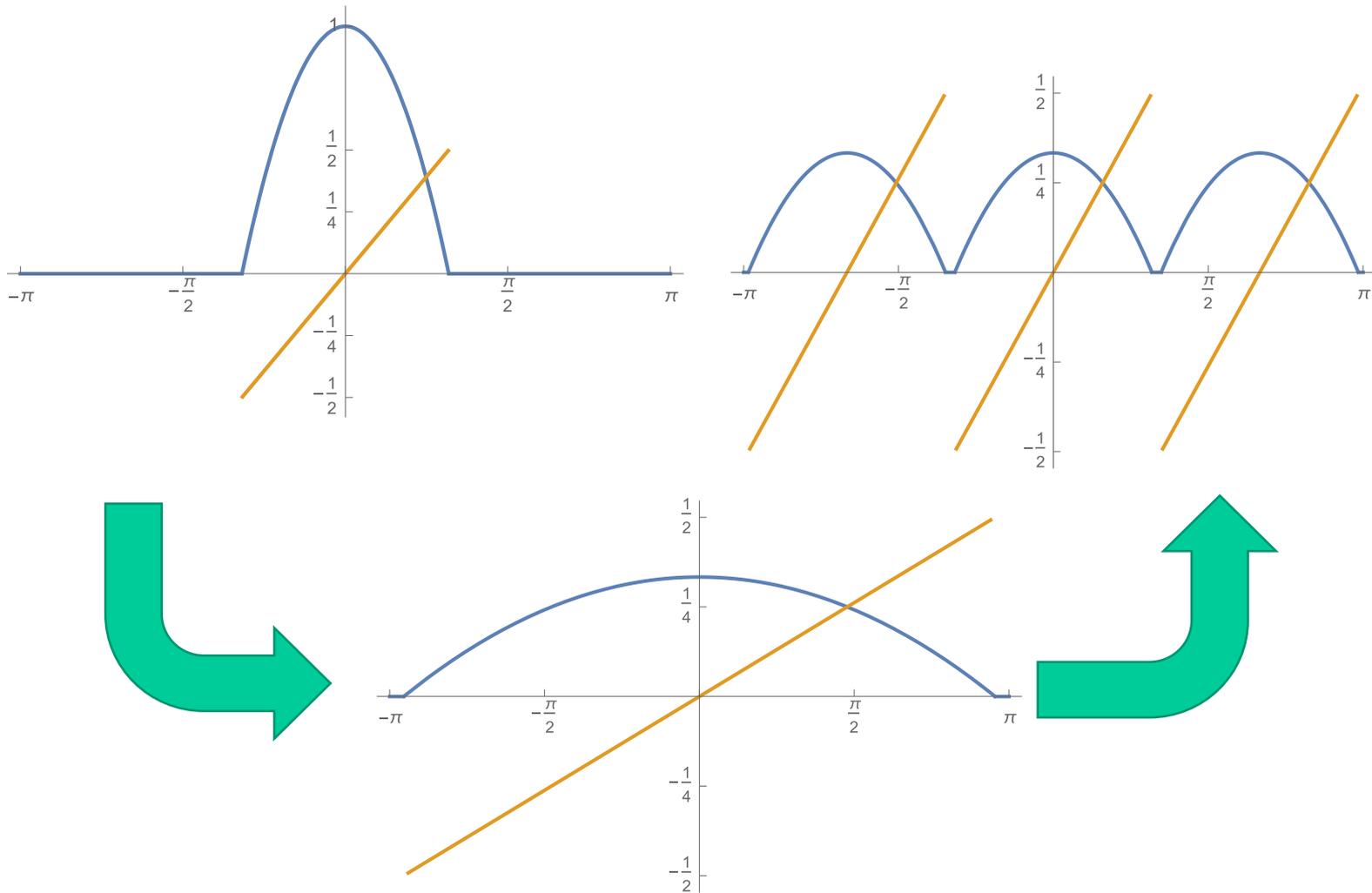
$$(1 - \omega^2) \exp(j\omega/2) \text{ si } \omega \in [-1, 1]$$



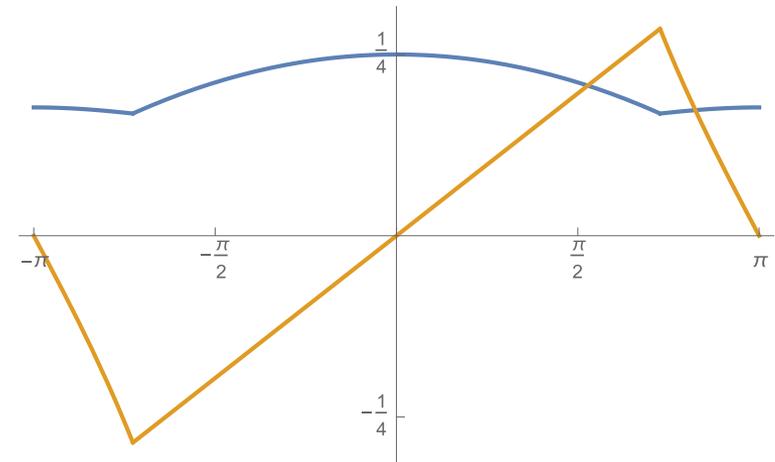
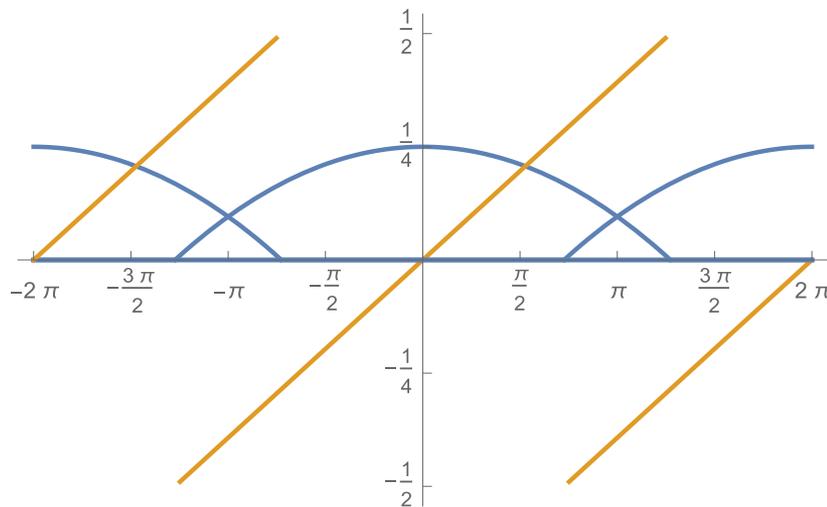
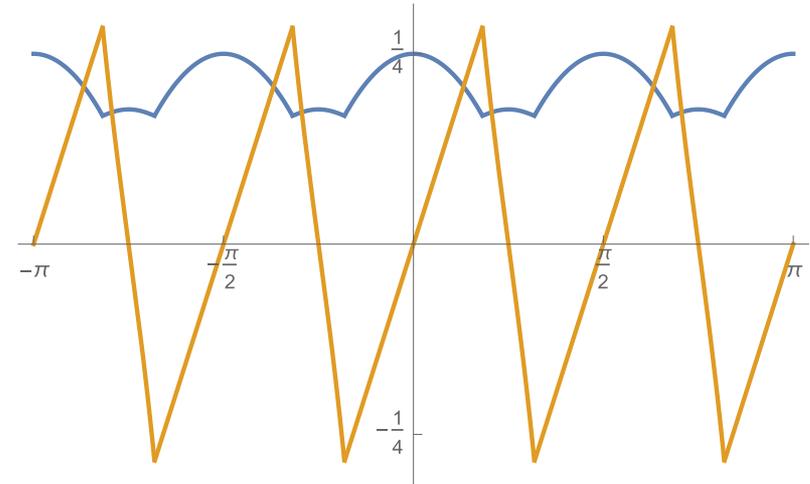
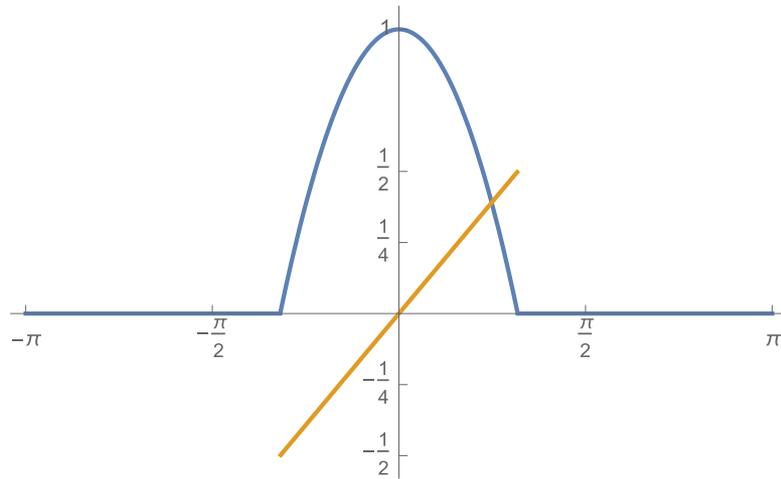
# Diezmado + interpolación (N=2)



# Diezmado + interpolación (N=3)



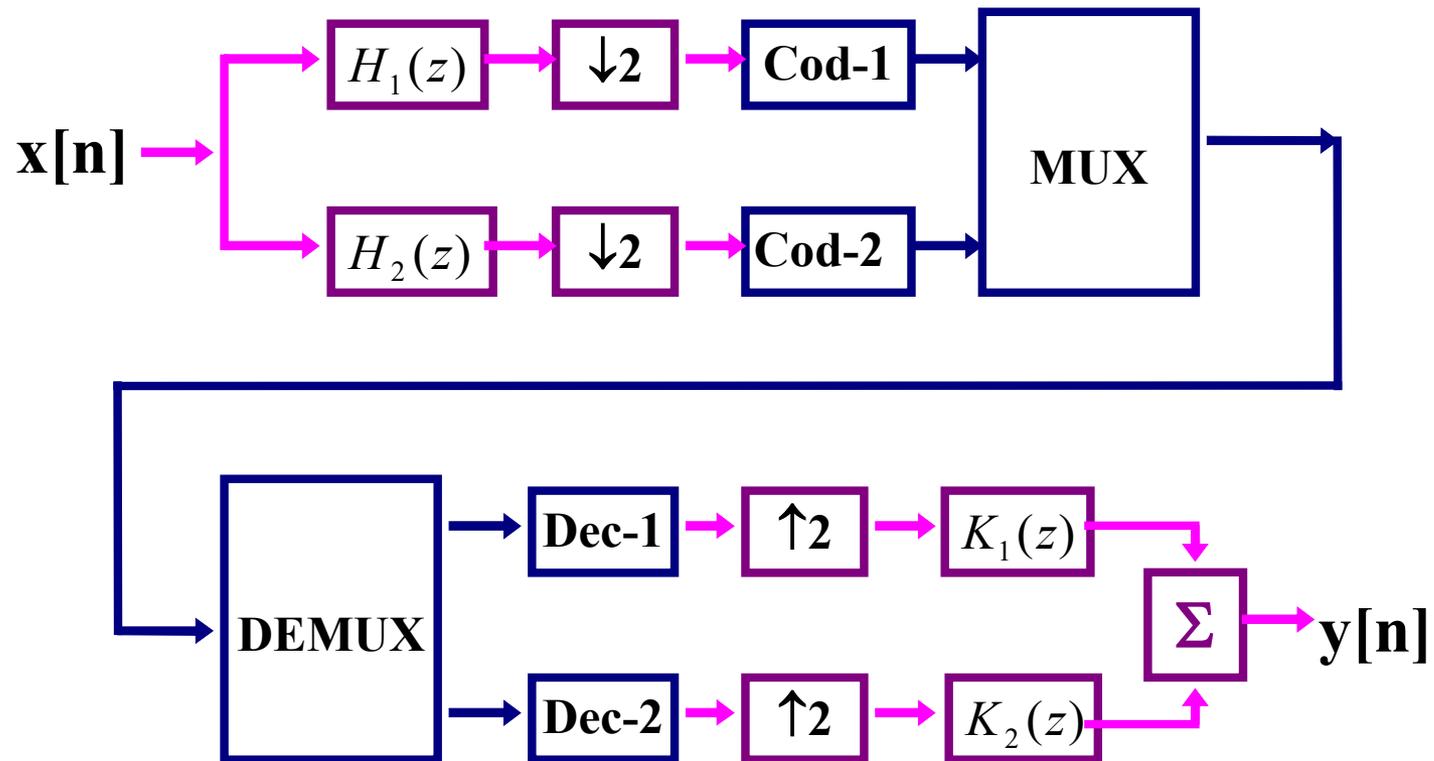
# Diezmado + interpolación (N=4)



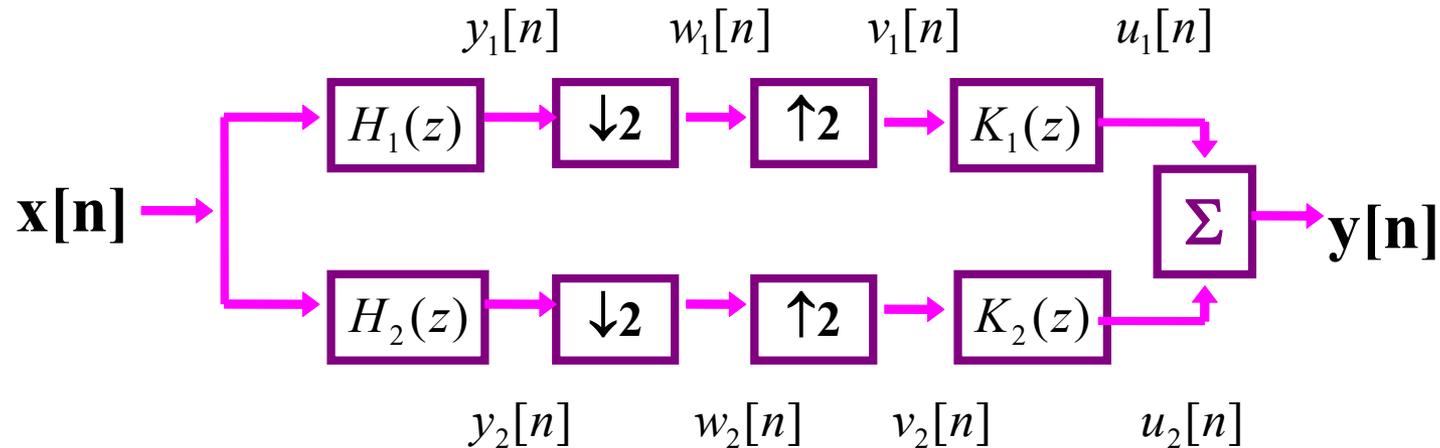


# Reconstrucción perfecta

# Codificación con dos subbandas



# Reconstrucción perfecta con dos subbandas



Para la rama superior

$$Y_1(z) = X(z)H_1(z) \quad W_1(z) = \frac{1}{2}\{Y_1(z^{1/2}) + Y_1(-z^{1/2})\} \quad V_1(z) = W_1(z^2) \quad U_1(z) = V_1(z) \cdot K_1(z)$$

Combinándolas

$$\begin{aligned} U_1(z) &= K_1(z) \cdot W_1(z^2) = K_1(z) \cdot \frac{1}{2}\{Y_1(z) + Y_1(-z)\} = \\ &= \frac{1}{2}K_1(z) \cdot \{X(z) \cdot H_1(z) + X(-z) \cdot H_1(-z)\} \end{aligned}$$

# Reconstrucción perfecta con dos subbandas

Para la rama inferior

$$\begin{aligned} U_2(z) &= K_2(z) \cdot W_2(z^2) = K_2(z) \cdot \{Y_2(z) + Y_2(-z)\} = \\ &= K_2(z) \cdot \{X(z) \cdot H_2(z) + X(-z) \cdot H_2(-z)\} \end{aligned}$$

Combinando ambas ramas:

$$\begin{aligned} Y(z) &= U_1(z) + U_2(z) = X(z) \cdot \frac{1}{2} (H_1(z) \cdot K_1(z) + H_2(z) \cdot K_2(z)) + \\ &\quad + X(-z) \cdot \frac{1}{2} (H_1(-z) \cdot K_1(z) + H_2(-z) \cdot K_2(z)) = \\ &= X(z) \cdot T(z) + X(-z) \cdot S(z) \end{aligned}$$

Si queremos reconstrucción perfecta, a lo sumo  $y[n]$  debe ser una versión amplificada y retardada de  $x[n]$

# Reconstrucción perfecta con dos subbandas

Esto es:

$$Y(z) = c \cdot X(z) \cdot z^{-K}$$

Fijando  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$ ,  $K_1(z)$  y  $K_2(z)$  de manera que se cumpla la condición anterior se obtienen las diferentes soluciones a este problema.

En forma matricial:

$$Y(z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} K_1(z) & K_2(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1(z) & H_1(-z) \\ H_2(z) & H_2(-z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix} = cz^{-k} \cdot X(z)$$

que implica

$$\begin{bmatrix} K_1(z) & K_2(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1(z) & H_1(-z) \\ H_2(z) & H_2(-z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2cz^{-k} & 0 \end{bmatrix}$$

# Reconstrucción perfecta con dos subbandas

Despejando

$$\begin{bmatrix} K_1(z) & K_2(z) \end{bmatrix} = \frac{c \cdot z^{-k}}{\begin{vmatrix} H_1(z) & H_1(-z) \\ H_2(z) & H_2(-z) \end{vmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} H_2(-z) & -H_1(-z) \end{bmatrix}$$

# Reconstrucción perfecta con dos subbandas y filtros FIR

Si imponemos que los filtros (tanto de análisis como de síntesis sean FIR) deben ser FIR:

$$K_1(z) = \frac{2cz^{-k}}{|\mathbf{H}(z)|} H_2(-z) \qquad K_2(z) = \frac{2cz^{-k}}{|\mathbf{H}(z)|} H_1(-z)$$

Lo que implica

$$\begin{vmatrix} H_1(z) & H_1(-z) \\ H_2(z) & H_2(-z) \end{vmatrix} = \gamma z^{-q}$$

$$H_1(z) \cdot H_2(-z) - H_1(-z) \cdot H_2(z) = Q(z) - Q(-z) = \gamma z^{-q}$$

Luego q debe ser impar (todos los términos pares de Q(z) y Q(-z) se cancelan).

Q(z) puede tener un número arbitrario de coeficientes de potencias pares (que se cancelarán entre sí), pero un único coeficiente de potencia impar.

# Reconstrucción perfecta con dos subbandas y filtros FIR

Cualquier factorización de la forma  $Q(z) = Q_1(z) \cdot Q_2(z)$ , donde tan sólo un único coeficiente de potencias impares de  $z$  es distinto de 0, es solución del problema. Basta tomar:

$$H_1(z) = Q_1(z) \text{ y } H_2(z) = Q_2(-z)$$

...pero las soluciones obtenidas pueden:

- Tener anchos de banda muy diferentes
- Adolecer de un fuerte solapamiento espectral

Es necesario introducir algún requisito adicional...



# Filtros espejo en cuadratura (QMF)

# Filtros espejo en cuadratura (QMF)

Como hemos visto, la salida,  $Y(z)$  puede escribirse:

$$Y(z) = X(z) \cdot \frac{1}{2} [H_1(z) \cdot K_1(z) + H_2(z) \cdot K_2(z)] + \\ + X(-z) \cdot \frac{1}{2} [H_1(-z) \cdot K_1(z) + H_2(-z) \cdot K_2(z)] = X(z) \cdot T(z) + X(-z) \cdot S(z)$$

Donde

$$T(z) = \frac{1}{2} [H_1(z) \cdot K_1(z) + H_2(z) \cdot K_2(z)]$$

$$S(z) = \frac{1}{2} [H_1(-z) \cdot K_1(z) + H_2(-z) \cdot K_2(z)]$$

El término que representa el solapamiento espectral,  $S(z)$ , puede eliminarse:

Si  $K_1(z) = H_2(-z)$  y  $K_2(z) = -H_1(-z)$

$$S(z) = \frac{1}{2} [H_1(-z)H_2(-z) - H_2(-z)H_1(-z)] \equiv 0$$

# Filtros espejo en cuadratura (QMF)

En estas condiciones:

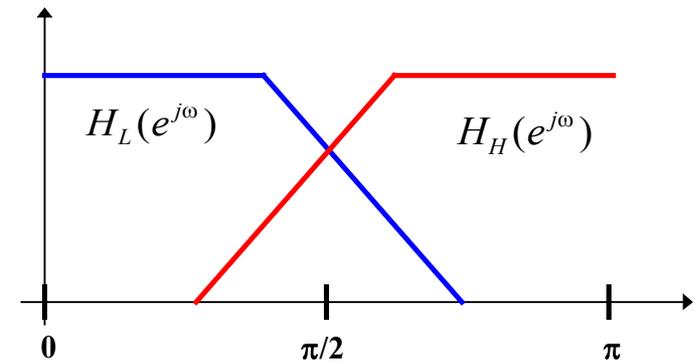
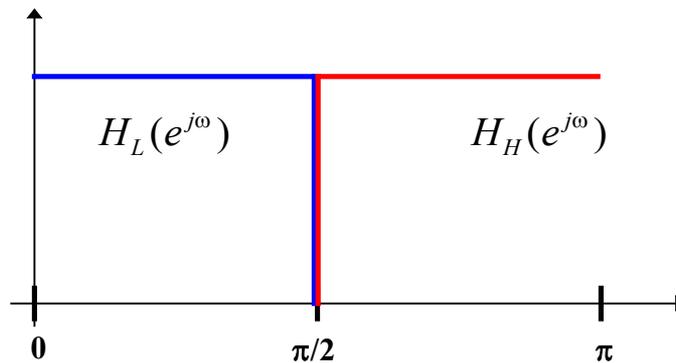
$$T(z) = \frac{1}{2} [H_1(z) \cdot H_2(-z) - H_1(-z) \cdot H_2(z)]$$

Si  $T(z) = c \cdot z^{-k}$  se obtendrá una reconstrucción perfecta.

Esta condición equivale a  $|T(e^{j\omega})| = cte.$  y  $\arg(T(e^{j\omega})) = k\omega$ . Si se verifican ambas condiciones  $Y(n) = c \cdot X(n-k)$

# Filtros espejo en cuadratura (QMF)

Para el diseño de los filtros QMF se escoge primero un filtro paso bajo,  $H_1(z)$  y se define el filtro paso alto como su imagen especular:  $H_2(z) = H_1(-z)$



# Filtros espejo en cuadratura (QMF)

Si  $H_1(z)$  es un filtro FIR de fase lineal y  $H_2(z)$  es su filtro espejo,

$$T(z) = \frac{1}{2} [H_1(z) \cdot H_1(z) - H_1(-z) \cdot H_1(-z)] = \frac{1}{2} [H_1^2(z) - H_1^2(-z)]$$

Será también de fase lineal, pero no está claro que  $|T(e^{j\omega})|$  sea constante.

Al forzar que los filtros baso alto y paso bajo sean uno la imagen especular del otro alrededor de la frecuencia  $\omega = \pi/2$  se traduce en

$$H_L(-z) = \sum_{k=0}^N h_L[k] \cdot (-z)^{-k} = \sum_{k=0}^N h_L[k] \cdot (-1)^{-k} \cdot z^k = \sum_{k=0}^N h_H[k] \cdot z^k$$

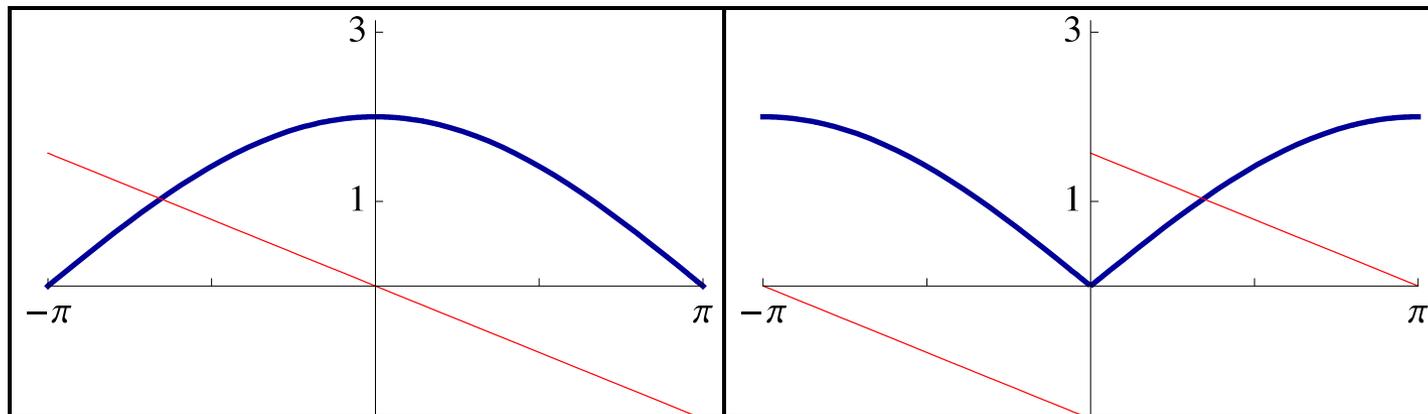
$$h_H[k] = (-1)^k \cdot h_L[k]$$

## QMF. N=2

Para  $N=2$  resulta  $H_1(z) = h_0 + h_1 \cdot z^{-1}$  y  $H_2(z) = H_1(-z) = h_0 - h_1 \cdot z^{-1}$ , de donde, a su vez:

$$T(z) = \frac{1}{2} [H_1^2(z) - H_2^2(-z)] = 2h_0h_1z^{-1}$$

Si bien puede obtenerse reconstrucción perfecta, la separación entre altas y bajas frecuencias es muy pobre, por lo que no existe mucho margen para aplicar diferentes cuantificadores en ambos canales.



*Amplitud (azul) y fase (rojo) de los filtros FIR para  $N=2$  (paso bajo a la izquierda y paso alto a la derecha), para  $h_0 = h_1 = 1$ .*

## QMF. N arbitrario

En general, la función de transferencia,  $T(z)$  para un sistema de orden  $N$  viene dada por la expresión

$$T(z) = 4 \sum_{k=1}^{k=N} \left( \sum_{\substack{(i,j) \\ i+j=2k+1}} h[i] \cdot h[j] \cdot z^{-2k+1} \right)$$

con lo que es imposible satisfacer  $T(z) = c \cdot z^{-k}$  excepto si se hace  $h[i]=0$  para todo  $i$  distinto de  $0$  y  $N-1$ , lo cual conduce a una discriminación más pobre según crece el orden del filtro!!.

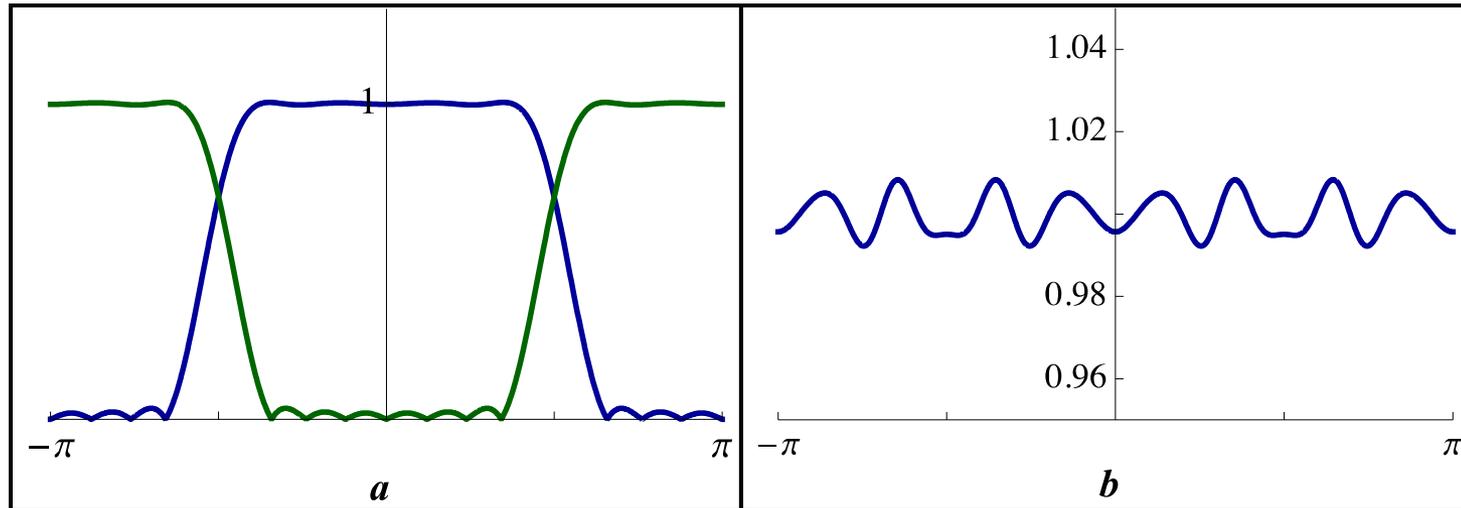
La respuesta plana es imposible de alcanzar para valores de  $N$  distintos de  $N=2$  y  $N=\infty$ , pero si es posible aproximarse a ella tanto como se desee mediante técnicas de optimización numéricas. Usualmente se escogen los filtros con un número par de etapas y formando un par simétrico - antisimétrico, esto es, que, además verifican

$$h_L[n] = h_L[N-1-n]$$

y por consiguiente,

$$h_H[n] = -h_H[N-1-n]$$

## QMF. N arbitrario



En la figura se presentan las características de una solución FIR en cuadratura de 16 etapas. La respuesta en amplitud de la pareja ofrece una discriminación en frecuencias bastante buena, mientras que la distorsión introducida se mantiene en una banda de  $\pm 1\%$  para todas las frecuencias. El mayor inconveniente es el elevado orden del filtro, que se traduce en un retardo significativo.



# Asignación de bits

# Asignación de bits

La señal de cada banda,  $x_k(t)$  se muestra a una frecuencia  $f_k$  y se codifica usando  $R_k$  bits por muestra, la tasa necesaria para transmitir la señal es:

$$I = \sum_{k=1}^M f_k R_k$$

Si (para simplificar) suponemos que todas las subbandas tienen la misma anchura:

$$\Delta W_k = \frac{W}{M} \quad \text{y} \quad f_k = 2 \frac{W}{M}$$

De donde

$$I = \frac{2W}{M} \sum_{k=1}^M R_k$$

Suponiendo que las subbandas no se solapan, la potencia total de la señal es la suma de las potencias de cada subbanda y, de manera similar, el error de reconstrucción es la suma de la potencia de ruido de reconstrucción para cada subbanda:

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^M \sigma_{x,k}^2$$

$$\sigma_{r,SBC}^2 = \sum_{i=1}^M \sigma_{r,k}^2$$

# Asignación óptima de bits

Minimizar  $\sigma_r^2 = \sum_{k=1}^M \sigma_{r,k}^2 = \sum_{k=1}^M \varepsilon_k^2 2^{-2R_k} \sigma_{x,k}^2$  Sujeto a la condición:  $MR = \sum_{k=1}^M R_k$

Empleando la técnica de los multiplicadores de Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial R_k} \left[ \varepsilon^2 \sum_{k=1}^M 2^{-2R_k} \sigma_{x,k}^2 - \lambda \left( MR - \sum_{k=1}^M R_k \right) \right] = 0$$

$$R_k = \frac{1}{2} \log_2 (2\varepsilon^2 \ln 2) + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_{x,k}^2}{\lambda}$$

De donde, aplicando  $MR = \sum_{k=1}^M R_k$ , resulta:

$$R_k = R + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_{x,k}^2}{\sqrt[M]{\prod_{i=1}^M \sigma_{x,i}^2}}$$

# Bibliografía

- ★ N.S: Jayant y P. Noll, “***Digital Coding of Waveforms: Principles and Applications to Speech and Video***”, Prentice Hall Signal Processing Series, New Jersey, 1984.
- ★ S. Khalid, “***Introduction to Data Compression***”, 3<sup>rd</sup> ed., Elsevier, San Francisco, 2006.
- ★ M.Vetterli y J. Kovacevic, “***Wavelets and Subband Coding***”, Prentice Hall Signal Processing Series, Prentice Hall, New Jersey, 1995.