# Probabilidad

# Tema 3

# CONTENIDO

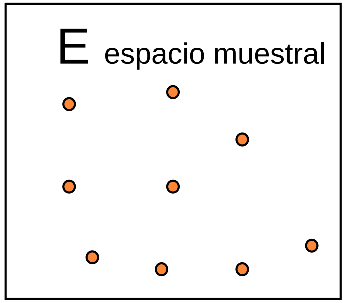
- Introducción
- Algebra de sucesos
- Leyes de Morgan
- Concepto de probabilidad y sus propiedades
- Definiciones de probabilidad
- Regla de Laplace
- Probabilidad condicionada
- Independencia de sucesos
- Teorema de la probabilidad total
- Teorema de Bayes

# Introducción

- Experimento aleatorio: cuando al repetir el experimento bajo las mismas condiciones no se conoce a priori qué resultado se va a obtener.
  - Lanzar una moneda y ver si sale cara o cruz.
  - Lazar un dado y ver qué número sale

# INTRODUCCIÓN

- Espacio muestral (E): Está constituido por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
  - Lanzar una moneda: $\{C, X\}$
  - Lazar un dado y ver que número sale: {1,2,3,4,5,6}
  - Elegir al azar un cierto nº real en el intervalo: [0,1]




- Tipos de espacio muestrales:
  - Espacios muestrales finitos: Tienen un nº finito de elementos.
  - Espacios muestrales infinitos numerables: Se puede establecer una correspondencia uno a uno de los elementos del espacio muestral con el conjunto de números naturales. Ejemplo: nº de vehículos que pasan por un peaje en determinado intervalo de tiempo.
  - Espacios muestrales infinitos no numerables: no se pueden establecer correspondencias biunívocas con los números naturales. Ejemplo: números reales en el intervalo [0,1]

# INTRODUCCIÓN

- Suceso: cualquier subconjunto tomado de los elementos de E. Ejemplo: E $=\{Lanzar\ un\ dado\} = \{1,2,3,4,5,6\}$

Ejemplo de Sucesos:

$$A=\{obtener\ resultado\ par\} = \{2,4,6\}$$

$$B= \{Resultado\ múltiplo\ de\ 3\} = \{3,6\}$$

- Dado un espacio muestral E, el conjunto de **TODOS** los posibles sucesos relativos a E se denomina ESPACIO DE SUCESOS S(E) (o $\mathscr{P}$(E), también llamado a veces CONJUNTO POTENCIA O CONJUNTO DE PARTES DE E
- S(E) tiene como elementos a conjuntos o sucesos (que es lo mismo)
- S contiene un total de $2^n$ elementos (donde n es el número de elementos de E), incluyendo a E y a Ø={ }
- Ejemplo: En el experimento del lanzamiento de una moneda con E= {C, X}, el **espacio de sucesos** es: S(E) ={Ø, {C},{X},{C,X}}.

# INTRODUCCIÓN

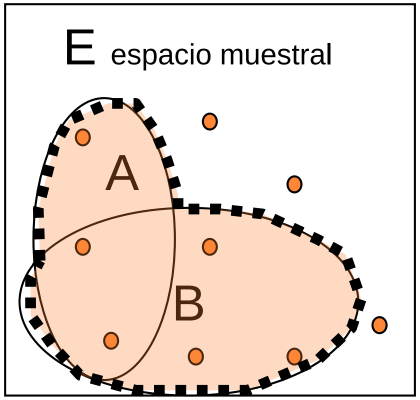
- **Otro ejemplo**: Consideremos el espacio muestral $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ del lanzamiento de un dado. Su espacio de Sucesos S(E) contiene $2^6$=64 elementos, y es:

- S(E)={**Ø**,{1},{2},{3},{4},{5},{6},{1,2},{1,3},{1,4},{1,5},{1,6},{2,3},{2,4},{2,5},{2,6},{3,4},{3,5},{3,6},{4,5},{4,6},{5,6},{1,2,3},{1,2,4},{1,2,5},{1,2,6},{1,3,4},{1,3,5},{1,3,6},{1,4,5},{1,4,6},{1,5,6},{2,3,4},{2,3,5},{2,3,6},{2,4,5},{2,4,6},{2,5,6},{3,4,5},{3,4,6},{3,5,6},{4,5,6},{1,2,3,4},{1,2,3,5},{1,2,3,6},{1,2,4,5},{1,2,4,6},{1,2,5,6},{1,3,4,5},{1,3,4,6},{1,3,5,6},{1,4,5,6},{2,3,4,5},{2,3,4,6},{2,3,5,6},{2,4,5,6},{3,4,5,6},{1,2,3,4,5},{1,2,3,4,6},{1,2,3,5,6},{1,2,4,5,6},{1,3,4,5,6},{2,3,4,5,6},**{1,2,3,4,5,6}**}

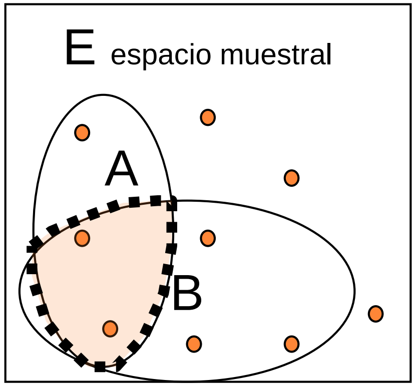
- **Sucesos notables:**
- Suceso seguro (E={1,2,3,4,5,6}): Suceso que ocurre siempre
- Suceso imposible (Ø={ }): Suceso que no ocurre nunca

# OPERACIONES CON SUCESOS

- Unión de sucesos $A \cup B$ : Cuando ocurre A o B
  - A{1,2}
  - $\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \rightarrow \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$
  - B{2,3}

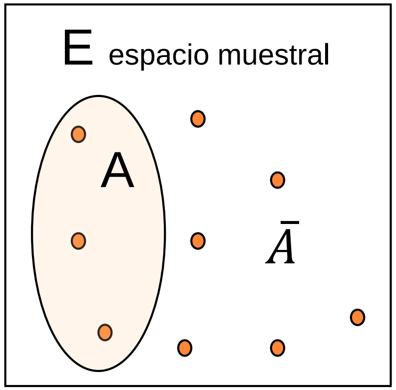



- Intersección de sucesos $A \cap B$: Cuando ocurren A y B simultáneamente:
  - $A \cap B \rightarrow \{2\}$

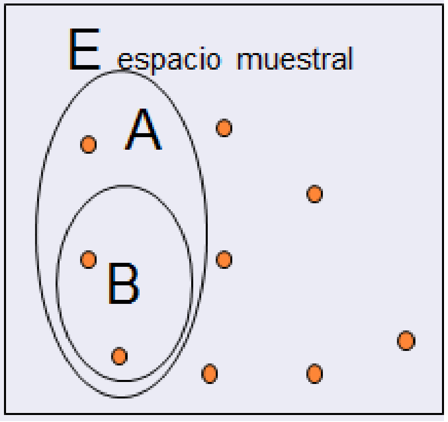


# Operaciones con sucesos

- Suceso complementario de A, $\bar{A}$ : Cuando ocurre siempre que no ocurre A

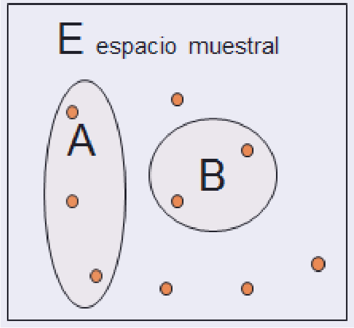



- Suceso contenido en otro: A ⊂B: Si siempre que ocurre A ocurre B



# Operaciones con sucesos

- Sucesos disjuntos incompatibles o mutuamente excluyentes: Si no pueden ocurrir simultáneamente. La ocurrencia de uno impide que ocurra el otro.




- Diferencia de sucesos, A-B: que ocurra A y no ocurra B

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \text{ y } B = \{5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$A - B = \{1; 2; 3; 4\}$$

# Propiedades de la unión y la intersección de sucesos

- Asociativa:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Conmutativa:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

- Distributiva:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Elemento neutro:

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap E = A$$

# EJEMPLO

- Consideremos el espacio muestral $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ del lanzamiento de un dado y su correspondiente Espacio de Sucesos S(E) (con $2^6$=64 elementos que son sucesos) que vimos antes:
S(E)={**Ø**,{1},{2},{3},{4},{5},{6},**{1,2}**,{1,3},{1,4},**{1,5}**,{1,6},{2,3},{2,4},{2,5},{2,6},{3,4},{3,5},{3,6},{4,5},**{4,6}**,{5,6},{1,2,3},{1,2,4},{1,2,5},{1,2,6},{1,3,4},**{1,3,5}**,{1,3,6},{1,4,5},{1,4,6},{1,5,6},{2,3,4},{2,3,5},{2,3,6},{2,4,5},**{2,4,6}**,{2,5,6},{3,4,5},{3,4,6},{3,5,6},{4,5,6},{1,2,3,4},{1,2,3,5},{1,2,3,6},{1,2,4,5},{1,2,4,6},{1,2,5,6},{1,3,4,5},{1,3,4,6},{1,3,5,6},{1,4,5,6},{2,3,4,5},{2,3,4,6},{2,3,5,6},{2,4,5,6},**{3,4,5,6}**,{1,2,3,4,5},{1,2,3,4,6},{1,2,3,5,6},{1,2,4,5,6},{1,3,4,5,6},**{2,3,4,5,6}**,{1,2,3,4,5,6}}
- Sean los sucesos:

$$A = \{El\ resultado\ es\ par\} \rightarrow \mathbf{\{2,4,6\}}$$
$$B = \{El\ resultado\ es\ \geq 3\} \rightarrow \mathbf{\{3,4,5,6\}}$$
$$C = \{El\ resultado\ es\ 1ó\ 5\} \rightarrow \mathbf{\{1,5\}}$$

- Calcular los siguiente sucesos y ver que también pertenecen a S(E):
  1. El resultado es par o mayor o igual a 3 → $\mathbf{\{2,3,4,5,6\}} \rightarrow A \cup B$
  2. El resultado es par y mayor o igual a 3 → $\mathbf{\{4,6\}} \rightarrow A \cap B$
  3. El resultado no es par → $\mathbf{\{1,3,5\}} \rightarrow \bar{A}$
  4. El resultado no es mayor o igual a 3 → $\mathbf{\{1,2\}} \rightarrow \bar{B}$
  5. El resultado es par y uno o cinco → $\emptyset \rightarrow A \cap C$

# Leyes de Morgan, suceso seguro y suceso imposible

- El contrario de la unión de dos sucesos es la intersección de los sucesos contrarios.

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

- El contrario de la intersección de dos sucesos es la unión de los sucesos contrarios:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

- El contrario del suceso seguro es el suceso imposible:

$$\bar{E} = \emptyset$$

- El contrario del suceso imposible es el suceso seguro:

$$\overline{\emptyset} = E$$

# Ejemplo de aplicación de las leyes de Morgan

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$$
$$\overline{A \cup B} = \{1\}$$

$$A = \{El\ resultado\ es\ par\} \rightarrow \{2,4,6\}$$
$$B = \{El\ resultado\ es\ \geq 3\} \rightarrow \{3,4,5,6\}$$

$$\bar{B} = \{1, 2\}$$
$$\bar{A} = \{1, 3,5\}$$
$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$$

*Espacio muestral*

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$A \cap B = \{4,6\}$$
$$\overline{A \cap B} = \{1,2,3,5\}$$

$$\bar{B} = \{1, 2\}$$
$$\bar{A} = \{1, 3,5\}$$
$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{1,2,3,5\}$$

# Concepto de probabilidad y sus propiedades

- La probabilidad cuantifica en tanto por uno la posibilidad de que se produzca un suceso:
- Ejemplo: Probabilidad de que salga cruz al lanzar una moneda:

$$E = \{C, X\}$$

$$P(X) = \frac{1}{2}$$

# Frecuencia absoluta de un suceso A

- Se denota como $n_A$, es el número de veces que aparece el suceso A en n pruebas.
- Propiedades:
  1. $n_A \leq n$
  2. $n_E = n$ y $n_\emptyset = 0$
  3. Si A y B son sucesos incompatibles, disjuntos y mutuamente excluyentes:

$$n(A \cup B) = n_A + n_B$$

# Frecuencia relativa de un suceso

- Se llama frecuencia relativa de un suceso y se nota como $f_r\,(A)$, al siguiente cociente:

$$f_r = \frac{n_A}{n}$$

- Propiedades:

1. $f_r\,(A) \leq 1$
2. $f_r\,(E) = 1$
3. Si A y B son sucesos incompatibles, disjuntos o mutuamente excluyentes, entonces:

$$f_r\,(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$$

# Ejemplo

- Un número del 1 al 10 es seleccionado al azar. Sean los siguientes sucesos:

$$\mathrm{A} = \{\text{"}El\ número\ elegido\ es\ par\text{"}\}$$

$$\mathrm{B} = \{\text{"}El\ número\ elegido\ es\ primo\text{"}\}$$ (no se considera el 1 como primo)

$$\mathrm{C} = \{\text{"}El\ número\ elegido\ es\ multiplo\ de\ 3\text{"}\}$$

Expresar los siguientes sucesos: $= A \cap B; A \cup B; \bar{A} \cap \bar{B}; A \cap C; B \cap C;\ \bar{A} \cap C;\ (A \cup B) \cup \bar{C}$

- Enunciamos los sucesos:

$$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$A = \{2,4,6,8,10\} \rightarrow \bar{A} = \{1,3,5,7,9\}$$
$$B = \{2,3,5,7\} \rightarrow \bar{B} = \{1,4,6,8,9,10\}$$
$$C = \{3,6,9\} \rightarrow \bar{C} = \{1,2,4,5,7,8,10\}$$

En función de los sucesos enunciados expresamos las operaciones indicadas:

$A \cap B = \{El\ número\ elegido\ es\ par\ y\ primo\} \rightarrow \{2\}$
$A \cup B = \{El\ número\ elegido\ es\ par\ o\ primo\} \rightarrow \{2,3,4,5,6,7,8,10\}$
$\bar{A} \cap \bar{B} = \{El\ número\ elegido\ es\ impar\ y\ no\ primo\} \rightarrow \{1,9\}$
$A \cap C = \{El\ número\ elegido\ es\ par\ y\ múltiplo\ de\ 3\} \rightarrow \{6\}$
$\bar{A} \cap C = \{El\ número\ elegido\ es\ impar\ y\ múltiplo\ de\ 3\} \rightarrow \{3,9\}$
$B \cap C = \{El\ número\ elegido\ es\ primo\ y\ múltiplo\ de\ 3\} \rightarrow \{3\}$
$(A \cup B) \cap \bar{C} = \{El\ número\ elegido\ es\ primo\ o\ par\ y\ no\ múltiplo\ de\ 3\} \rightarrow \{2,4,5,7,8,10\}$

# Definiciones de probabilidad

**1. Definición de Laplace o REGLA DE LAPLACE**: En un experimento aleatorio dónde todos los sucesos tengan la misma probabilidad, la fórmula de Laplace se define como:

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favorables}{número\ de\ casos\ posibles}$$

# Definiciones de probabilidad

2. Definición clásica: nº al que tiende la frecuencia relativa de un suceso A cuando n aumenta:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_r(A)$$

# DEFINICIONES DE PROBABILIDAD

3. Definición axiomática: Dado un experimento aleatorio, con espacio muestral E y espacio de sucesos asociado S(E), se define la probabilidad como una aplicación del Espacio de sucesos S(E) en el intervalo [0,1] que satisface los tres axiomas siguientes:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(E) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B), si\ A\ y\ B \epsilon\ S(E)\ con\ A \cap B = \emptyset$

# Definiciones de probabilidad

Consecuencias de los axiomas:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)\ \forall\ A \epsilon S(E)$

Como $A$ y $\bar{A}$ son sucesos incompatibles y su unión es el suceso seguro E, tenemos:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(E) = 1$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

2. $P(\emptyset) = 0$

En efecto, $\emptyset$ es el suceso complementario del suceso seguro, por lo que aplicando las propiedades anteriores, tenemos:

$$P(\emptyset) = 1 - P(E) \rightarrow 1 - 1 = 0$$

3. La probabilidad de un suceso cualquiera siempre es menor que 1:

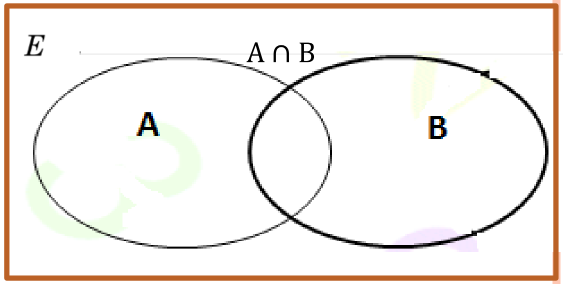
$$P(A) \leq P(A) + P(\bar{A});$$

Puesto que $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

# DEFINICIONES DE PROBABILIDAD

Siendo A y B dos sucesos cualesquiera, se verifica:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$




Demostración: Pongamos

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$
$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

Entonces $(A \cup B) = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

Calculando las probabilidades para estos sucesos queda:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \rightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Con lo que finalmente queda:

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B)$$

Por lo que:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

# Probabilidad condicionada

Dado un suceso A con $\mathrm{P}(A) > 0$, $para\ cualquier\ suceso\ B$ definimos la probabilidad del suceso B condicionado al suceso A como:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

# Ejemplo

Consideremos el experimento aleatorio del lanzamiento de un dado:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Con $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$

Sea A $= \{Resultado\ par\} \rightarrow \{2,4,6\}$

Sea B $= \{Resultado\ < 4\} \rightarrow \{1,2,3\}$

Calcular $P(B|A)$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) \rightarrow P(2) = \frac{1}{6}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} \rightarrow \frac{1}{3}$$

# Independencia de sucesos

- Dados dos sucesos A y B, tales que P(A), P(B) >0, diremos que son INDEPENDIENTES si:

$$P(A|B) = P(A)$$

O, lo que es lo mismo, si :

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$$

- Demostración: Por la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

De lo que se deduce: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$,

Luego, según la definición

$$P(A|B) = P(A) \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

# Ejemplo

- Se elige al azar una carta de una baraja y después de devolverla al montón tomamos otra segunda. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un oro y la segunda un as?

1. Definimos los sucesos:
2. $A = \{extracción\ de\ un\ as\ en\ la\ segunda\ oportunidad\} \rightarrow P(A) = \frac{4}{40}$
3. $B = \{Extracción\ de\ un\ oro\ en\ la\ primera\} \rightarrow P(B) = \frac{10}{40}$
4. Como realizamos la extracción con reemplazamiento, la probabilidad de que ocurra A no se ve afectada por que en la 2ª extracción el suceso haya ocurrido o no:
5. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow \frac{4}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{40}{1600} = 0.025$

# Teorema de la probabilidad total

- Consideremos un conjunto de sucesos $\{A_i\}$ i $= 1 \dots m$, tales que cumplen las siguientes condiciones:
  1. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = E$
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset;\;\; i \neq j;\quad i, j = 1 \dots . n$ (incompatibles dos a dos)

Es decir, la unión de todos ellos es el **espacio muestral E**, y son incompatibles dos a dos. Un conjunto de sucesos que cumple estas condiciones se llama "Sistema completo de Sucesos". SCS.

- Sea ahora un suceso cualquiera B y un sistema completo de sucesos tales que:

$$P(A_i) > 0; \quad \forall i$$

- El teorema de la probabilidad total dice que:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

# Teorema de la probabilidad total

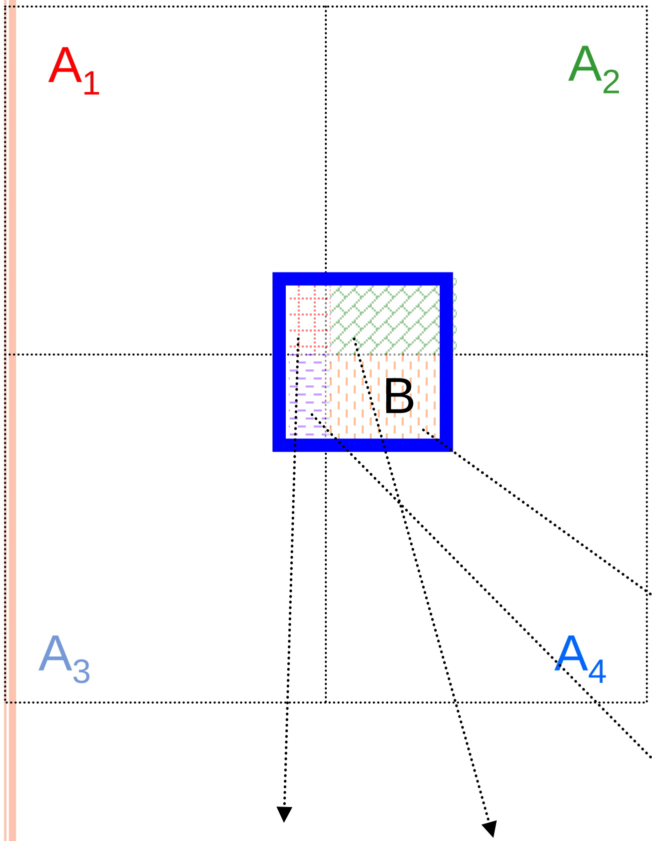
- Resumiendo, el Teorema de la Probabilidad Total establece que, dado el **sistema completo de sucesos** anterior, si conocemos las probabilidades condicionadas

$$P(B|A_1), P(B|A_2), \ldots P(B|A_n)$$

Entonces la probabilidad del suceso B puede calcularse de la forma

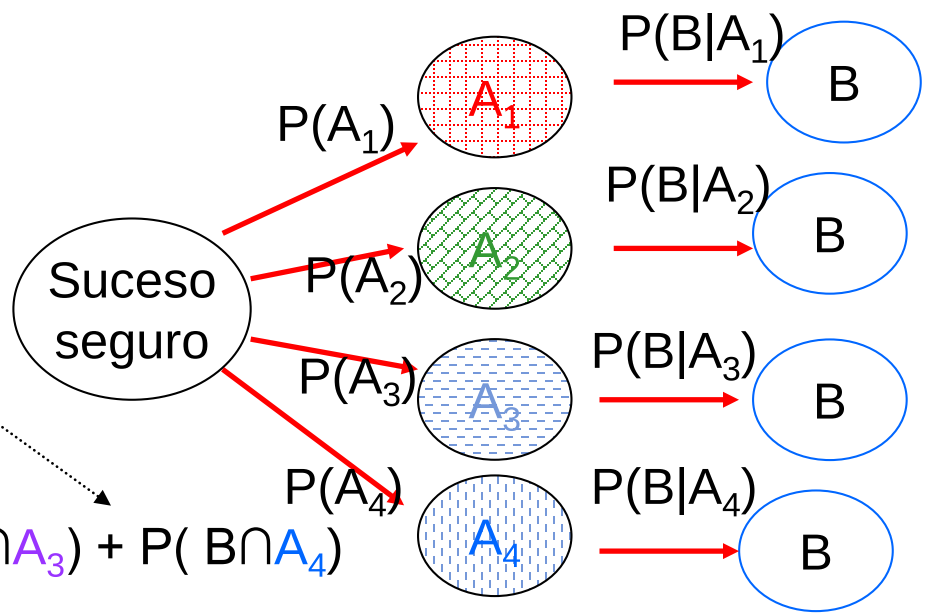
$$\mathrm{P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

# ESQUEMATICAMENTE




Si conocemos la probabilidad de B en cada uno de los componentes de un sistema completo de sucesos, entonces…

… podemos calcular la probabilidad de B.




$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4)$$

$$= P(A_1)\, P(B|A_1) + P(A_2)\, P(B|A_2) + P(A_3)\, P(B|A_3) + P(A_4)\, P(B|A_4)$$

# Ejemplos

**Ejemplo 1:** Se tienen dos urnas, la urna nº 1 tiene tres bolas blancas y dos negras, la urna nº 2 tiene dos bolas blancas y tres negras. Se elige una urna al azar y se extrae una bola, ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

- Enunciamos los sucesos: $A_1 = \{Elegir\ la\ urna\ nº\ 1\}$, $A_2 = \{Elegir\ la\ urna\ nº\ 2\}$, $B = \{Extraer\ una\ bola\ blanca\}$. Como la urna está seleccionada al azar: $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$, y es fácil ver que $P(B|A_1) = \frac{3}{5}$, $P(B|A_2) = \frac{2}{5}$. Aplicando el TPT, tenemos

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) = P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{5}{10} \to \boxed{\frac{1}{2}}$$

**Ejemplo 2:** La probabilidad de que un autobús sufra accidente en día nublado es 0.09 y en día seco 0.005. Durante un periodo de 10 días ha habido 7 días secos y tres nublados. ¿Cuál es la probabilidad de accidente en base a esta información?

- Enunciamos los sucesos B = {Se produce accidente}, S = {El día es seco}, N = {El día es nublado} . Aplicando el TPT, tenemos

$$P(B) = P(S) \cdot P(B|S) + P(N) \cdot P(B|N) = 0.7 \cdot 0.005 + 0.3 \cdot 0.09 = 0.0305$$

# Teorema de Bayes

Considerando las mismas premisas que para el teorema de la probabilidad total, suponemos ahora que estamos interesados en conocer la probabilidad de que ocurrido el suceso B, la causa haya sido $A_i$

Expresado analíticamente queremos calcular:

$$P(A_i|B)$$

El teorema de Bayes establece que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

Sabemos que:$A_i$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Por otra parte,

$$P(B|A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$$

Despejando $P(A_i \cap B)$

$$P(A_i \cap B) = P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Queda:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

Además según el teorema de la probabilidad Total $P(B)\ es$:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

$$\boxed{P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}}$$

# EJEMPLO TEOREMA DE BAYES

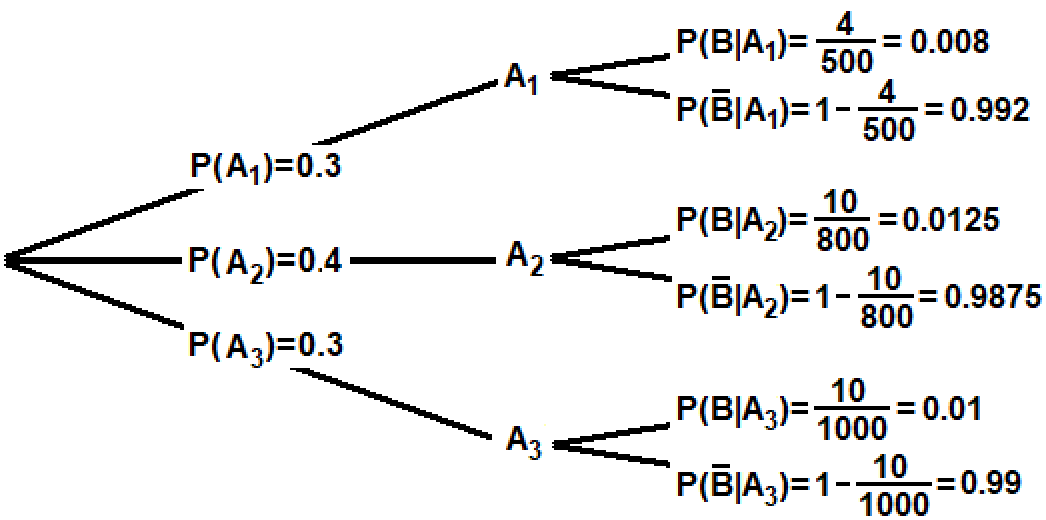
- Una tienda vende filtros para purificadores de aire industriales. Todos los filtros son de la misma marca, pero han sido elaborados en tres fábricas distintas $A_1$, $A_2$, y $A_3$. La tienda tiene en stock 100 filtros, de los cuáles 30 se fabricaron en $A_1$, 40 en $A_2$, y 30 en $A_3$. Se sabe que, en promedio, 4 de cada 500 filtros procedentes de $A_1$ son defectuosos y no funcionan y lo mismo ocurre con 10 de cada 800 filtros de $A_2$ y con 10 de cada 1000 filtros de $A_3$.

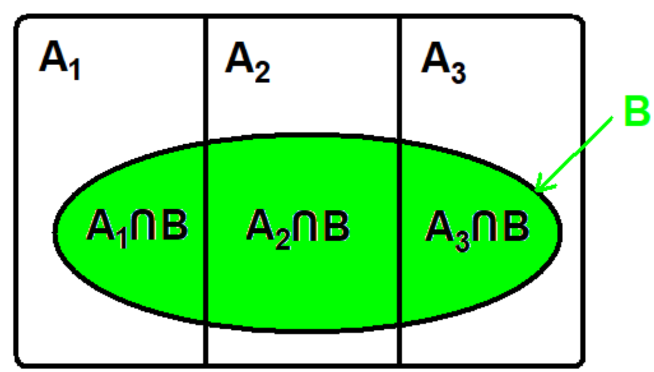
a) ¿Qué porcentaje de filtros defectuosos esperas que haya en la tienda?

b) Un cliente adquiere un filtro y no le funciona. Calcular las probabilidades de que el filtro haya sido fabricado en cada una de las tres fábricas.

- **Solución:** definimos los sucesos: $A_1$ ={fabricado en $A_1$}, $A_1$ ={fabricado en $A_1$}, $A_1$ ={fabricado en $A_1$}, B ={filtro defectuoso}, $\overline{B}$ ={filtro **no** defectuoso}.

**Vemos primero el diagrama de sucesos y el árbol de probabilidades del problema:**



# Ejemplo Teorema de bayes

- **Solución apartado a)** La probabilidad de que el filtro sea defectuoso viene dado por el Teorema de la Probabilidad Total. Multiplicando por 100 esta probabilidad, nos dará el porcentaje de filtros defectuosos en la tienda:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) \ + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$$
$$= \frac{30}{100} \cdot \frac{4}{500} + \frac{40}{100} \cdot \frac{10}{800} + \frac{30}{1000} \cdot \frac{10}{1000} = \frac{13}{1250} = 0.0104 \to \boxed{1.04\ \%}$$

**Solución apartado b)** La probabilidad de que, sabiendo que el filtro adquirido es defectuoso, haya sido fabricado en cada una de las tres fábricas, viene dada por el Teorema de Bayes:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{30}{100} \cdot \frac{4}{500}}{\frac{13}{1250}} = \frac{0.3 \cdot 0.008}{0.0104} = 0.23077$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{40}{100} \cdot \frac{10}{800}}{\frac{13}{1250}} = \frac{0.4 \cdot 0.0125}{0.0104} = 0.48077$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3) \cdot P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{\frac{30}{100} \cdot \frac{10}{1000}}{\frac{13}{1250}} = \frac{0.3 \cdot 0.01}{0.0104} = 0.28846$$