# Variable Aleatoria Discreta

# Tema 4

# Contenido del tema

- Introducción
- Parte I: Variables Aleatorias Discretas
  - Generalidades
  - Distribución Binomial
  - Distribución de Poisson
- Parte II: Variables aleatorias Continuas
  - Generalidades
  - Distribución de Laplace-Gauss
  - Teorema Central del limite
  - Distribución $\chi^2$ de Pearson
  - Distribución t de Student
  - Distribución F de Fisher-Snedecor

# VARIABLE ALEATORIA

- El resultado de un experimento aleatorio puede ser descrito en ocasiones como una cantidad numérica.
- En estos casos aparece la noción de variable aleatoria
  - Función que asigna a cada suceso un número.

- Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas (como en el primer tema del curso).

# Introducción

- Variable aleatoria: Es una función definida sobre el espacio muestral E de un experimento aleatorio, que toma valores en el campo de los números reales:

$$X: E \to R$$

- Asocia un número real al resultado de un experimento aleatorio.

# Introducción

Ejemplo de variable aleatoria :Lanzar dos monedas a la vez:

$$E = \{(x, x); (x, c); (c, x); (c, c)\}$$

Sea X la variable aleatoria:

$$X = "n^{\underline{o}}\ de\ caras\ obtenidas"$$

- $(x, x) = 0$ $\rightarrow P(X = 0) = {}^{1}/_{4}$
- $(x, c) = 1$ $\rightarrow P(X = 1) = {}^{2}/_{4}$
- $(c, \mathrm{x}) = 1$ $\rightarrow P(X = 1) = {}^{2}/_{4}$
- $(c, c) = 2$ $\rightarrow P(X = 2) = {}^{1}/_{4}$

# INTRODUCCIÓN

- Tipos de variables aleatorias
  - Variables aleatorias discretas: cuando toman un nº finito numerable de valores reales.

    La del ejemplo anterior: Lanzar dos monedas y anotar resultados

  - Variables aleatorias continuas: Toman un conjunto infinito no numerable de valores reales.

Ejemplo:

$$X = altura \rightarrow \ (1{,}40 - 2{,}10)$$

# Variables aleatorias discretas

Parte I

# Generalidades sobre variables aleatorias discretas

Función de probabilidad o función de masa $f(x)$:

La tabla que forma la variable junto con sus probabilidades recibe el nombre de función de probabilidad de la variable.

| $X$ | $x_1$ | $x_2 \ldots..$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| $P(X = xi)$ | $P(X = x_1)$ | $P(X = x_2)$ | $P(X = x_3)$ |

En el ejemplo anterior (lanzar dos monedas a la vez):

| X | $x_1$=0 | $x_2$=1 | $x_3$=2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $P(X = 0) = {}^1/_4$ | $P(X = 1) = {}^1/_2$ | $P(X = 2) = {}^1/_4$ |

# Generalidades sobre variables aleatorias discretas

## Función de distribución $F(x)$:

Dada una variable aleatoria discreta $X$, a la función acumulativa:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Se le denomina *función de distribución de X*

En el ejemplo anterior (lanzamiento de dos monedas):

$$F(X) \begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ {}^{1}/_{4} \; si \; 0 \leq x < 1 \\ {}^{3}/_{4} \; si \; 0 \leq x < 2 \\ 1 \; si \; x \geq 2 \end{cases}$$

# Generalidades sobre variables aleatorias discretas

Media, esperanza matemática o valor esperado:

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot p_i$$

Ejemplo:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{x_i}$ | 0 | 1 | 2 |
| $\boldsymbol{p_i}$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

# Generalidades sobre variables aleatorias discretas

Varianza:

$$\sigma^2 = V[X] = \sum_{i=1}^{r} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

Considerando la variable $(X-\mu)^2$ cuyos valores son $(x_i-\mu)^2$, es decir,

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$$

Desarrollando $(x_i-\mu)^2$ queda:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{r} ({x_i}^2 - 2\mu x_i + \mu^2) p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{r} {x_i}^2 \cdot p_i - 2\mu \sum_{i=1}^{r} x_i \cdot p_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{r} p_i = E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$\boxed{\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = \sum_{i=1}^{r} {x_i}^2 \cdot p_i - \mu^2}$$

# Generalidades sobre variables aleatorias discretas

## Desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

## MOMENTOS

Momento de orden k respecto del origen:

$$\alpha_k = E[X^k] = \sum_{i=1}^{N} {x_i}^k \cdot p_i$$

El momento de orden 1 respecto del origen es la media

Momento central de orden k:

$$\gamma_k = E[(X-\mu)^k] = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^k \cdot p_i$$

El momento central de orden 2 es la varianza

# Coeficientes calculados a partir de momentos

Coeficiente de asimetría o sesgo:

$$\frac{\gamma_3}{\alpha_3}$$

Coeficiente de apuntamiento o curtosis:

$$\frac{\gamma_4}{\alpha_4}$$

# Funciones de distribución para variables aleatorias discretas

Ejemplos de distribuciones discretas de probabilidad:

- Distribución Bernouilli
- Distribución de Binomial
- Distribución de Poisson

Otros ejemplos (que no veremos en este curso), son:

- Distribución Uniforme
- Distribución Geométrica
- Distribución Binomial negativa
- Distribución Hipergeométrica
- …

# Distribución binomial

Consideremos un experimento aleatorio en el que nos interesa observar si ocurre o no un determinado suceso $A$ de probabilidad conocida, $P(A) = p$ . La variable aleatoria $X$ se define como:

$$X = \text{ nº de veces que ocurre A en n pruebas.}$$

$$\text{Como } P(A) = p, \text{ entonces: } P(\bar{A}) = 1 - p = q$$

Consideremos n ensayos de Bernoulli (un ensayo de Bernouilli es aquél experimento aleatorio que solo puede dar dos resultados, con probabilidades p y 1-p), es decir, n ensayos aleatorios independientes, donde la probabilidad p es la misma en todos ellos. Estamos entonces ante una distribución binomial de parámetros n y p→ $B(n, p)$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \; k = 0,1,2, \dots n$$

En el caso de n pruebas el valor de $X = k$ corresponde a k éxitos y $n - k$ fracasos.

NOTA: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

# Parámetros de la distribución binomial

## Media aritmética

$$\mu = E[X] = \sum k \cdot P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = np$$

$$\boxed{\mu = np}$$

## Varianza

$$\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot P(X = k) - (np)^2$$

$$= (n^2p^2 + npq) - n^2 \cdot p^2 = npq$$

$$\boxed{\sigma^2 = npq}$$

## Desviación típica

$$\boxed{\sigma = \sqrt{npq}}$$

# Ejemplo de la binomial

Si un estudiante responde al azar a un examen de 8 preguntas de verdadero o falso ¿Cual es la probabilidad de que acierte 4? ¿Cual es la probabilidad de que acierte dos o menos? ¿Cual es la probabilidad de que acierte cinco o más? ¿Cuanto valen la media y la varianza del número de preguntas acertadas?

Se trata de una binomial $B(8, {}^{1}/_{2})$, es decir, de parámetros $n = 8$;

$p = {}^{1}/_{2}$ $q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$$P(X = 4) \rightarrow \binom{8}{4} \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^4 \rightarrow \frac{8!}{4!(8-4)!} \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}273$$

$P(X \leq 2) = P\ (X = 0) + P\ (X = 1) + P\ (X = 2) = 0{,}004 + 0{,}031 + 0{,}109 = 0{,}144$

$P(X \geq 5) = [P\ (X = 5) + P\ (X = 6) + P\ (X = 7) + P(X = 8)] = 0{,}364$

También se puede hacer como:

$P(X \geq 5) = 1 - [P(X \leq 4)] = 1 - (0{,}004 + 0{,}031 + 0{,}109 + 0{,}219 + 0{,}273) = 0{,}364$

$$\mu = n \cdot p \rightarrow 8 \cdot 0{,}5 = 4$$
$$\sigma^2 = npq \rightarrow 8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 2$$

# Ejemplo problema de la binomial

- En un hospital se comprobó que la aplicación de un determinado tratamiento en enfermos hepáticos producía mejoría en el 80% de los casos. Si se aplica a 8 personas calcular:
  a) Probabilidad de que mejoren 5
  b) Probabilidad de que mejoren al menos 3
  c) Numero de personas que se espera que mejoren. ¿Qué nos indica este número?

# Ejemplo problema de la binomial

Variable aleatoria X="número de enfermos que mejoran al aplicar el tratamiento"

$$p = 0{,}8 \rightarrow q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

a) $P(X = 5) = \binom{8}{5} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^{8-5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^{8-5} = 0{,}1468$

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = [1 - P(X = 0) + P\,(X = 1) + P\,(X = 2)] = 0{,}9988$

Donde $P(X = 0) = \binom{8}{0} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^{8-0} = \frac{8!}{0!(8-0)!} 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^{8-0} = 0{,}00000256$

$$P(X = 1) = \binom{8}{1} \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^{8-1} = \frac{8!}{1!\,(8-1)!} 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^{8-1} = 0{,}0001$$

$$P(X = 2) = \binom{8}{2} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^{8-2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^{8-2} = 0{,}0011$$

c) El numero de personas esperado que mejoren con la aplicación del tratamiento es la media o Esperanza de X:

$$\mu = np \rightarrow 8 \cdot 0{,}8 = 6{,}4$$

Es decir el numero de personas que mejoran está entre 6 y 7

# Distribución de Poisson

La variable aleatoria X se dice que sigue una distribución de Poisson si puede tomar todos los valores enteros 0,1,2… con probabilidades:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

- $\lambda > 0$
- $k = 0,1,2 \ldots.$
- $e = 2,71828$

Depende sólo del parámetro λ (variable aleatoria uniparamétrica)

Su media, varianza y desviación típica son

$$\mu = \lambda$$
$$\sigma^2 = \lambda$$
$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

Aproxima a la binomial B(n,p) cuando, tomamos $\lambda = np$, y se verifica:

$$n > 50$$
$$p < 0{,}1$$
$$np < 5$$

# Ejemplo distribución Poisson

La probabilidad de que en una manifestación una persona se desmaye es de 0,001. Considerando que acuden unas 5000 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que se desmayen 25?

Se trata de una binomial de parámetros:

$$n = 5000$$
$$p = 0{,}001$$

Su probabilidad sería:

$$P(X = 25) = \binom{5000}{25} \cdot 0{,}001^{25} \cdot (1 - 0{,}001)^{5000-25}$$

Como $n > 50 \rightarrow n = 5000$ $y$ $p < 0{,}001$ podemos calcularlo mediante Poisson:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Dónde $\lambda = 5000 \cdot 0{,}001 = 5$, por lo que quedaría:

$$P(X = 25) = \frac{5^{25}}{25!} \cdot e^{-5}$$