Contrastes de Hipótesis (Paramétricos)

Tema 7

DEFINICIONES

- Contraste de hipótesis: procedimiento estocástico mediante el cuál se investiga la aceptación o rechazo de una afirmación acerca de una o algunas características de una población estadística.
- Hipótesis nula H^o: Hipótesis que se quiere contrastar y es por tanto, la que se acepta o rechaza como conclusión del contraste.
- Hipótesis alternativa H^a: Es la hipótesis que nos sitúa frente a H^o de forma que si se acepta H^a, se rechaza H^o y recíprocamente si se rechaza H^a, se acepta H^o.
- Estadístico del contraste o función de decisión del contraste: Es una función de la muestra aleatoria que se aplica a la muestra (X^1, X^2,….,X^n) en un punto de la recta real.
- Región crítica: Conjunto de valores del estadístico del contraste que lleva a la decisión de rechazar la hipótesis nula H^o.
- Región de aceptación: conjunto de valores del estadístico que lleva a la decisión de aceptar la hipótesis nula H^o.
- Error del tipo I: rechazar la hipótesis nula H^o siendo cierta.
- Error del tipo II: aceptar la hipótesis nula H^o siendo falsa.

- <u>Contraste unilateral:</u> Aquel cuya región crítica está formada por un solo conjunto de puntos de la recta real.
- En el contraste unilateral la región de rechazo se sitúa en uno solo de los extremos o colas de la distribución muestral, y se utiliza cuando la hipótesis alternativa es o bien estrictamente mayor o bien estrictamente menor:

$$\begin{array}{lcl} H_0: \mu = \mu_0 & & H_0: \mu = \mu_0 \\ H_a: \mu < \mu_0 & \text{ó} & H_a: \mu > \mu_0 \end{array}$$

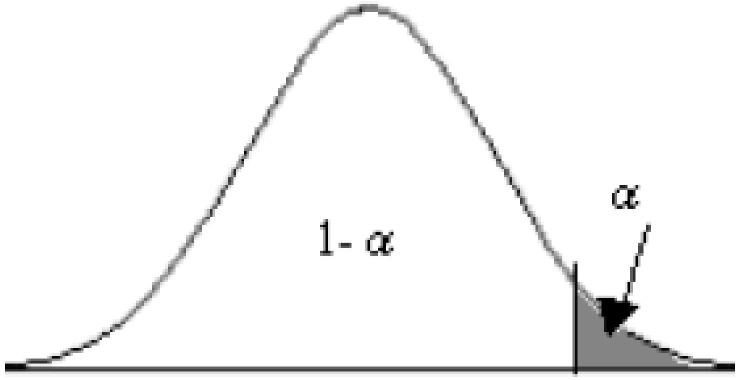
Contraste unilateral

Si:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_a : \mu > \mu_0$$

Gráficamente queda:

El área sombreada constituye la región de rechazo

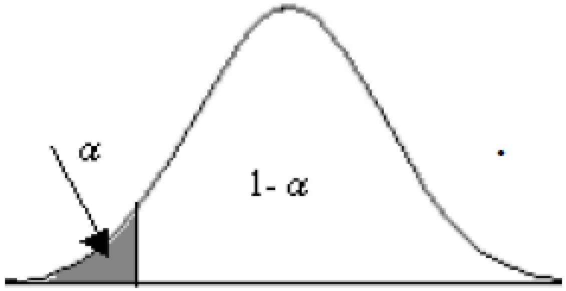


Contraste unilateral

Si

$$H_0{:}\mu = \mu_0$$
$$H_a{:}\ \mu < \mu_0$$

El área sombreada constituye la región de rechazo:



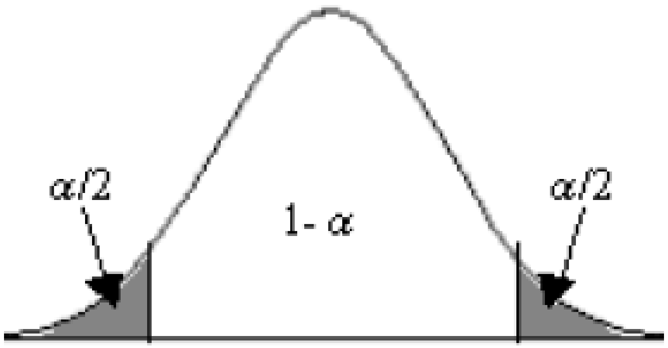
Contraste bilateral

- Aquél cuya región critica está formada por dos intervalos disjuntos de la recta real. El contraste bilateral sitúa la región de rechazo en los dos extremos (colas) de la distribución muestral.
- El contraste bilateral (o de dos colas) se utiliza cuando la Hipótesis Alternativa asigna al parámetro cualquier valor diferente al establecido en la Hipótesis Nula.

Contraste bilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_a : \mu \neq \mu_0$$

- Su representación gráfica es (el área sombreada constituye la región de rechazo):



- En este caso tenemos dos regiones de rechazo que se corresponden con las áreas sombreadas.

Fases de la realización del contraste.

1. Enunciado y determinación de las hipótesis nula y alternativa respectivamente.
2. Elección del nivel de significación (α)
3. Especificación del tamaño muestral.
4. Selección del estadístico o función de decisión, cuya distribución en el muestreo es conocida si la hipótesis nula es verdadera
5. Determinación de la región crítica
6. Cálculo de la función de decisión

Contraste bilateral para la media de una población normal con varianza conocida

a) Contraste Bilateral

$$H_0\!:\mu = \mu_0$$

$$H_a\!: \mu \neq \mu_0$$

Como σ es conocido, sabemos que $\bar{X}$ es $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Así:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Es decir:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\sigma/2}\right) = 1-\alpha$$

Aceptamos H_0 si: $\left|\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right| \leq z_{\alpha/2}$

Contraste unilateral para la media de una población normal con varianza conocida

- Contraste unilateral:

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad\qquad H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_a: \mu < \mu_0 \qquad \text{ó} \qquad H_a: \mu > \mu_0$$

El estadístico usado es el mismo que para contrastes bilaterales, sólo cambia la región de rechazo:

Si la hipótesis alternativa planteada es:

$$H_a: \mu > \mu_0$$

Se acepta H_0 si:

$$\frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \leq z_\alpha$$

Contraste unilateral para la media de una población normal con varianza conocida

- Si la hipótesis alternativa es:
- $H_a\colon \mu < \mu_0$
- Se acepta H_0 si:

- $\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \geq -z_\alpha$

Ejemplo

- Si en una población la desviación típica es $\sigma = 29$, contrastar la hipótesis de que $\mu = 347$ con un nivel de significación del 1%, es decir $\alpha = 0.01$, mediante una muestra de 200 individuos para la que $\bar{x} = 352$

Contraste para la media de una población con varianza desconocida y n<30

a) Contraste bilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_a : \mu \neq \mu_0$$

Estadístico del contraste:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Así, se acepta H_0 si

$$\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \right| \leq t_{n-1;\alpha/2}$$

Contraste para la media de una población normal con varianza desconocida

- b) Contraste unilateral:

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad\qquad H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_a: \mu < \mu_0 \qquad \text{ó} \qquad H_a: \mu > \mu_0$$

El estadístico usado es el mismo que para contrastes bilaterales, sólo cambia la región de rechazo:

Si la hipótesis alternativa planteada es:

$$H_a: \mu > \mu_0$$

Se acepta H_0 si:

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{n-1;\alpha}$$

Contraste para la media de una población normal con varianza desconocida

Si la hipótesis alternativa planteada es:

$$H_a: \mu < \mu_0$$

Se acepta H_0 si:

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \geq -t_{n-1,\alpha}$$

Ejemplo

Un profesor (A) de matemáticas afirma que sus alumnos tardan como media catorce minutos en resolver un problema. Otro profesor (B) del departamento afirma que los alumnos tardan significativamente más de catorce minutos en resolver el problema. Para dirimir la controversia, se eligen al azar diecisiete alumnos, y se toma como variable respuesta en el experimento el tiempo transcurrido entre que se les entrega el ejercicio y el momento en que los alumnos devuelven el citado ejercicio resuelto. Los resultados muestrales del estudio han sido $\bar{X} = 19$ minutos; $S = 7$ minutos.

¿Cuál de los profesores tiene razón (A ó B), a un nivel de significación de α=0.01?

CONTRASTE BILATERAL PARA LA VARIANZA DE UNA POBLACIÓN NORMAL

a) Contraste bilateral

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

El estadístico de contraste se distribuye como una χ^2_{n-1}. Usando la cuasivarianza muestral S^2 como estimador, tenemos:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

Se acepta H_0 si:

$$\left|\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\right| \leq \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$$

O bien si:

$$\left|\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\right| \geq \chi^2_{n-1;\alpha/2}$$

Contraste unilateral para la varianza de una población normal

b) Contraste unilateral:

$$H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_a\colon \sigma^2 > \sigma_0^2$$
$$H_a\colon \sigma^2 < \sigma_0^2$$

Si la hipótesis planteada es: $H_a\colon \sigma^2 > \sigma_0^2$

Se acepta H_0 si:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n-1;\alpha}$$

Si la hipótesis alternativa planteada es $H_a\colon \sigma^2 < \sigma_0^2$

Se acepta H_0 si:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{n-1;1-\alpha}$$

EJEMPLO

- Un cliente está dispuesto a demostrar a un fabricante de tornillos que la desviación típica de los tornillos de su marca es de 1,5 cm. Con un $\alpha = 0{,}01$, se analiza una muestra de 20 tornillos, y obtiene que la $S^2 = 2{,}3\ cm^2$. ¿Cómo realizará el contraste?

Contraste bilateral para la proporción poblacional

a) Contraste bilateral:

$$H_0: p = p_0$$
$$H_a: p \neq p_0$$

Siendo $\hat{p}$ la proporción muestral, el estadístico de contraste es:

$$\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Se acepta H_0 si:

$$\frac{|\hat{p}-p_0|}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leq z_{\alpha/2}$$

Contraste unilateral para la proporción poblacional

- Contraste unilateral

$$H_0: p = p_0$$
$$H_a: p < p_0$$
$$H_a: p > p_0$$

Si la hipótesis alternativa planteada es $H_a: p > p_0$

Se acepta H_0 si:

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leq z_\alpha$$

Si la hipótesis alternativa planteada es: $H_a: p < p_0$

Se acepta H_0 si:

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \geq z_{1-\alpha}$$

Ejemplo

- La Oficina de Tráfico de un país se plantea hacer una campaña publicitaria en televisión para concienciar a los conductores a usar el cinturón de seguridad. No se iniciará la campaña si la proporción de conductores que usa el cinturón es significativamente mayor que 0.60. Hay que averiguar entonces si, por propia iniciativa, la proporción de conductores que lo usa actualmente es mayor que un 60%. Contrastar, a un $\alpha = 0{,}01$ la hipótesis nula $p = 0.60$ frente a la alternativa $p > 0.60$, utilizando una muestra aleatoria de 35 conductores, de los cuales 25 llevaban el cinturón se seguridad puesto.
- Concluir si, a este nivel de significación, es necesario iniciar la campaña publicitaria o no.