# OCW-UPM Estadística para Ingeniería Civil y Medioambiental

Autores: E. M. García del Toro, C. Hermoso, E. J. Huertas

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

TEMA 3 - PROBABILIDAD

## Ejercicios resueltos de álgebra y probabilidad de sucesos

**Ejercicio 1.-** Dados tres sucesos $A$, $B$ y $C$ expresa con operaciones los siguientes sucesos:
a) De los tres sucesos, solo se verifica (u ocurre) $A$.
b) Los tres sucesos ocurren simultáneamente.
c) Ocurren $A$ y $B$, pero no $C$.
d) Por lo menos dos de los tres sucesos ocurren.
e) Ocurren única y exclusivamente dos de los tres sucesos.
f) Ocurre exclusivamente uno de los tres sucesos.
g) No ocurre ninguno de los tres sucesos.

**Solución ejercicio 1:**
**Apartado a)** $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
**Apartado b)** $A \cap B \cap C$
**Apartado c)** $A \cap B \cap \bar{C}$
**Apartado d)** $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap B)$
**Apartado e)** $\left(A \cap B \cap \bar{C}\right) \cup \left(A \cap C \cap \bar{B}\right) \cup \left(B \cap C \cap \bar{A}\right)$
**Apartado f)** $\left(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}\right) \cup \left(B \cap \bar{A} \cap \bar{C}\right) \cup \left(C \cap \bar{A} \cap \bar{B}\right)$
**Apartado g)** $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

**Ejercicio 2.-** Se consideran dos sucesos $A$ y $B$ de un experimento aleatorio de los que se sabe que $P(A) = 0.6$ y $P(A \cup B) = 0.8$. Se pide calcular $P(B)$ en cada uno de los siguientes supuestos:
a) $A$ y $B$ son sucesos incompatibles.
b) $A$ y $B$ son sucesos independientes.

**Solución ejercicio 2:**
**Apartado a)** La probabilidad de la unión de dos sucesos $A$ y $B$ es, en general

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Por otro lado, Dos sucesos $A$ y $B$ son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$. En este caso $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$, y sustituyendo en la expresión anterior tenemos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Ahora solo tenemos que despejar $P(B)$ y reemplazar los valores del enunciado $P(A \cup B) = 0.8$ y $P(A) = 0.6$. Así tenemos finalmente que

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.8 - 0.6 = 0.2.$$

**Apartado b)** La probabilidad de la unión de dos sucesos $A$ y $B$ es, en general

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Por otro lado, dos sucesos $A$ y $B$ son **independientes** si $P(A|B) = P(A)$, o equivalentemente, como se vio en las clases de teoría, si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Reemplazando este hecho en la expresión anterior nos da

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = P(A) + P(B)\left[1 - P(A)\right].$$

Despejando $P(B)$ y reemplazando los valores del enunciado $P(A\cup B)=0.8$ y $P(A)=0.6$ obtenemos finalmente

$$P(B)=\frac{P(A\cup B)-P(A)}{[1-P(A)]}=\frac{0.8-0.6}{1-0.6}=0.5.$$

**Ejercicio 3.-** De los sucesos dependientes $A$ y $B$ se sabe que $P(A\cap B)=0.2$, $P(B|A)=0.5$ y $P(A|B)=0.4$. Calcule:

a) $P(A)$ y $P(B)$

b) $P(A\cup B)$.

**Solución ejercicio 3:**

**Apartado a)** Obtenemos $P(A)$ y $P(B)$ mediante

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \to P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B|A)}=\frac{0.2}{0.5}=0.4,\\ P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \to P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A|B)}=\frac{0.2}{0.4}=0.5. \end{aligned}$$

**Apartado b)** utilizando el apartado anterior

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.4+0.5-0.2=0.7.$$

**Ejercicios resueltos del Teorema de la Probabilidad Total (TPT)**

**Ejercicio 4.-** La probabilidad de que un autobús sufra un accidente en día nublado es 0.09 y en día seco 0.005. Durante un periodo de 10 días ha habido 7 días secos y 3 nublados. ¿Cuál es la probabilidad total de accidente?

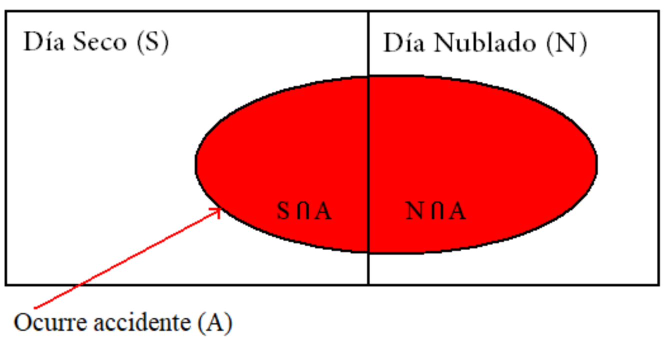



Figure 1: Sistema completo de sucesos y suceso intersección

**Solución ejercicio 4**: La probabilidad total de accidente será aquella que tenga en cuenta ambas posibilidades, tanto si el día está seco como si el día está nublado. Sean los sucesos $A\equiv$ "*Se produce accidente*", $S\equiv$ "*El día es seco*", y $N\equiv$ "*El día es nublado*". Según el TPT, tenemos

$$P(A)=P(S)\cdot P(A|S)+P(N)\cdot P(A|N)=\frac{7}{10}\cdot 0.005+\frac{3}{10}\cdot 0.09=0.0305.$$

**Ejercicio 5.-**En cierto país, existen en el mercado solamente dos marcas de agua embotellada, denominadas $M_1$ y $M_2$. En un estudio de la calidad de estas aguas, el 2 por ciento de las botellas de la marca $M_1$, y el 8 por ciento de las botellas de la marca $M_2$, contienen un exceso de Flúor. El 60 por ciento de las botellas a la venta en todo el país son de la marca $M_1$.

En una tienda escogida al azar, se compra una botella de agua que viene sin etiqueta, por lo que se desconoce de qué marca es.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que contenga un exceso de Flúor?

b) ¿y la probabilidad de que esa misma botella contenga una cantidad aceptable de Flúor?

**Solución ejercicio 5:** Se definen los sucesos: $F=$"contener exceso de Flúor", $M_1=$"botella de la marca $M_1$" y $M_2=$"botella de la marca $M_2$". Los sucesos $M_1$ y $M_2$ constituyen un sistema completo de sucesos porque su unión es el suceso seguro y son mutuamente excluyentes. Es decir, solamente se venden estas dos marcas de agua embotellada, y son de una marca o de la otra, no hay mezclas. Si compramos una botella de agua en ese país solo puede ser de la marca $M_1$ o de la marca $M_2$. En estas condiciones podemos utilizar el *Teorema de la Probabilidad Total.*

**Apartado a)** Claramente nos piden calcular $P(F)$. Dado que el suceso $F$ tiene intersección no vacía con $M_1$ y $M_2$, por el Teorema de la Probabilidad Total tenemos que

$$P(F) = P(M_1)P(F \mid M_1) + P(M_2)P(F \mid M_2). \tag{1}$$

Del enunciado del problema sabemos que el 60 por ciento de las botellas a la venta son $M_1$, por lo que el resto deben ser $M_2$. Así pues

$$P(M_1) = \frac{60}{100} = 0.6, \qquad P(M_2) = \frac{40}{100} = 0.4.$$

También nos dice el enunciado que el 2 por ciento de las botellas $M_1$ y el 8 por ciento de las $M_2$ contienen un exceso de Flúor, por lo que también sabemos que

$$P(F \mid M_1) = \frac{2}{100} = 0.02, \qquad P(F \mid M_2) = \frac{8}{100} = 0.08.$$

Reemplazando todas estas cantidades en (1) tenemos

$$P(F) = 0.6 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.08 = 0.044.$$

**Apartado b)** Si el suceso $F$ significa "contener exceso de Flúor", negarlo implica justamente que se contenga una cantidad aceptable de Flúor, por lo que $\bar{F}=$"contener cantidad aceptable de Flúor". Esta probabilidad es

$$P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0.044 = 0.956.$$

## Ejercicios resueltos del TPT y del Teorema de Bayes

**Ejercicio 6.-** En el mismo estudio de agua embotellada del **Ejercicio 5** anterior. Si se confirma que la botella comprada al azar contiene un exceso de Flúor, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca $M_1$?

**Solución Ejercicio 6**: Claramente nos piden calcular la probabilidad $P(M_1 \mid F)$, que según el *Teorema de Bayes* viene dada por

$$P(M_1 \mid A) = \frac{P(M_1)P(F \mid M_1)}{P(F)}. \tag{2}$$

Conocemos la probabilidad de que el agua de la botella contenga un exceso de Flúor (calculada en el Apartado a del Ejercicio 5) y que es $P(F) = 0.044$. Conocemos también del enunciado del Ejercicio 5 la probabilidad de que la botella comprada sea de la marca $M_1$

$$P(M_1) = 0.6,$$

y también nos dice ese enunciado que el 2 por ciento de las botellas $M_1$ contienen un exceso de Flúor, por lo que también sabemos que

$$P(F \mid M_1) = 0.02.$$

Reemplazando todas estas cantidades en (2) obtenemos finalmente

$$P(M_1 \,|\, F) = \frac{P(M_1)P(F \,|\, M_1)}{P(F)} = \frac{0.6 \cdot 0.02}{0.044} \simeq 0.2727.$$

**Ejercicio 7.-**Una tienda vende filtros para purificadores de aire industriales. Todos los filtros son de la misma marca, pero han sido elaborados en distintas fábricas, digamos $A$, $B$, y $C$. La tienda tiene en stock 30 filtros de $A$, 40 filtros de $B$ y 30 filtros de $C$. Se sabe que, en promedio, 4 de cada 500 filtros procedentes de $A$ son defectuosos y no funcionan y lo mismo ocurre con 10 de cada 800 filtros de $B$ y con 10 de cada 1000 filtros de $C$.

a) ¿Qué porcentaje de filtros defectuosos esperas que haya en la tienda?

b) Un cliente adquiere un filtro y no le funciona. Calcular las probabilidades de que el filtro haya sido fabricado en cada una de las tres fábricas.

**Solución ejercicio 7**

**Apartado a)** Definimos los sucesos: $A \equiv$ "*filtro elaborado en la fábrica A*", $B \equiv$ "*filtro elaborado en la fábrica B*", $C \equiv$ "*filtro elaborado en la fábrica C*" y $D \equiv$ "*filtro defectuoso*". Obviamente el suceso contrario al $D$ podemos enunciarlo $\bar{D} \equiv$ "*filtro no defectuoso*". Las probabilidades de ocurrencia de un suceso se calculan como número de casos favorables entre el número de casos posibles. Así pues, tenemos que la probabilidad de comprar en la tienda un filtro elaborado en la fábrica $A$ es

$$P(A) = \frac{30 \text{ filtros elaborados en } A}{100 \text{ filtros en stock en tienda}} = 0.3.$$

Análogamente tenemos

$$P(B) = \frac{40 \text{ filtros elaborados en } A}{100 \text{ filtros en stock en tienda}} = 0.4, \text{ y } P(C) = \frac{30 \text{ filtros elaborados en } A}{100 \text{ filtros en stock en tienda}} = 0.3.$$

Después, las probabilidades condicionadas a que dan lugar son las siguientes (se obtiene toda la información del enunciado)

- Probabilidad de que el filtro sea defectuoso, habiéndose elaborado en la fábrica $A$:

$$P(D \,|\, A) = \frac{4 \text{ filtros defectuosos}}{500 \text{ filtros elaborados en } A} = 0.008$$

- Probabilidad de que el filtro sea correcto (no defectuoso), habiéndose elaborado en la fábrica $A$: es la probabilidad complementaria a la anterior

$$P(\bar{D} \,|\, A) = 1 - P(D \,|\, A) = 1 - 0.008 = 0.992.$$

- Probabilidad de que el filtro sea defectuoso, habiéndose elaborado en la fábrica $B$:

$$P(D \,|\, B) = \frac{10 \text{ filtros defectuosos}}{800 \text{ filtros elaborados en } B} = 0.0125$$

- Probabilidad de que el filtro sea correcto (no defectuoso), habiéndose elaborado en la fábrica $B$: es la probabilidad complementaria a la anterior

$$P(\bar{D} \,|\, B) = 1 - P(D \,|\, B) = 1 - 0.008 = 0.9875.$$

- Probabilidad de que el filtro sea defectuoso, habiéndose elaborado en la fábrica $C$:

$$P(D \,|\, C) = \frac{10 \text{ filtros defectuosos}}{1000 \text{ filtros elaborados en } A} = 0.01$$

- Probabilidad de que el filtro sea correcto (no defectuoso), habiéndose elaborado en la fábrica $C$: es la probabilidad complementaria a la anterior

$$P(\bar{D} \,|\, C) = 1 - P(D \,|\, C) = 1 - 0.008 = 0.99.$$

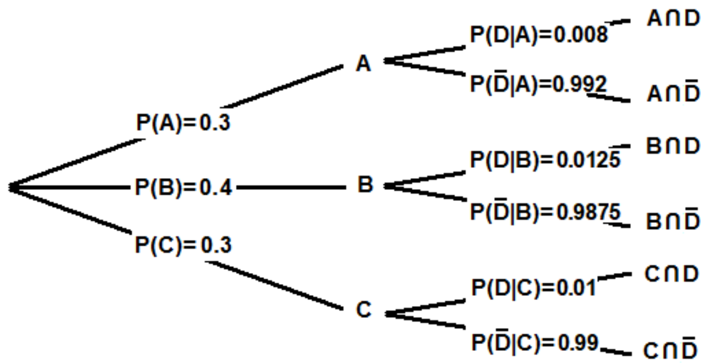



Figure 2: Árbol de probabilidades del problema

Toda esta información, que es toda la necesaria para resolver cualquier pregunta que nos hagan en el problema, puede ubicarse en el denominado **árbol de probabilidades** del problema. Aquí es el de la Figura 2

Así, el porcentaje total de filtros defectuosos, sin importar la fábrica en la que se elaboró, viene dado por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) = P(A)P(D\,|\,A) + P(B)P(D\,|\,B) + P(C)P(D\,|\,C) = 0.3 \cdot 0.008 + 0.4 \cdot 0.0125 + 0.3 \cdot 0.01 = 0.0104.$$

El porcentaje pedido será simplemente la probabilidad anterior multiplicada por 100, luego la respuesta al Apartado a) es 1.04 %.

**Apartado b)** Nos piden calcular $P(A\,|\,D)$, $P(B\,|\,D)$, y $P(C\,|\,D)$,,luego hay que aplicar el Teorema de Bayes en los tres casos:

$$\begin{aligned} P(A\,|\,D) &= \frac{P(A)P(D\,|\,A)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.008}{0.0104} = 0.23077, \\ P(B\,|\,D) &= \frac{P(B)P(D\,|\,B)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.0125}{0.0104} = 0.48077 \\ P(C\,|\,D) &= \frac{P(C)P(D\,|\,C)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.01}{0.0104} = 0.28846. \end{aligned}$$

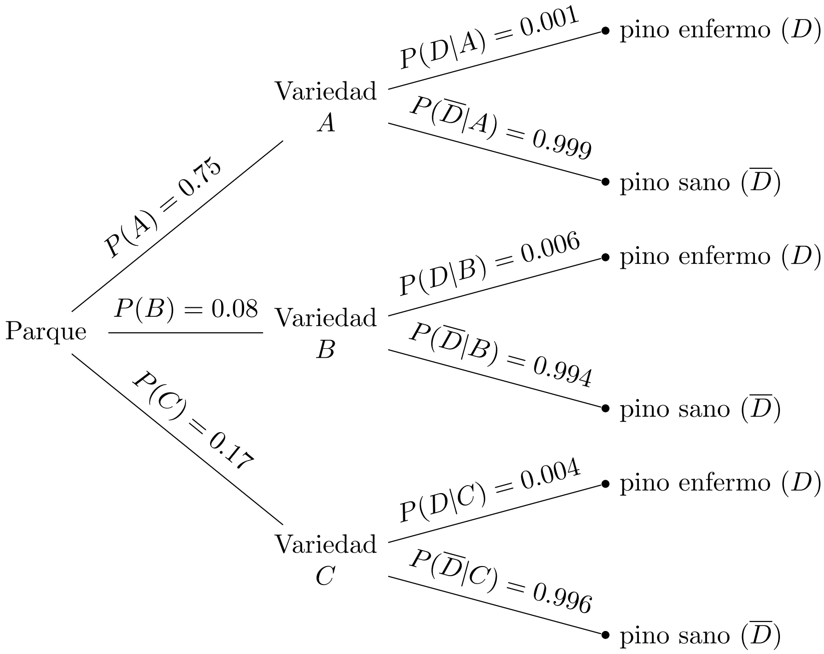
Observa que $P(A\,|\,D) + P(B\,|\,D) + P(C\,|\,D) = 1$, como es lógico.

**Ejercicio 8**: En un parque natural hay plantadas tres variedades distintas de pino, denotadas como $A$, $B$ y $C$. El 75% de los pinos del parque son de la variedad $A$, el 8% de la variedad $B$ y el 17% de la variedad $C$. Se sabe que el 0.1%, 0.6% y 0.4% respectivamente de las anteriores variedades han sido afectadas por el hongo causante de la enfermedad de la banda roja (Dothistroma septosporum).

a) Si se selecciona al azar un pino cualquiera del parque, ¿cuál es la probabilidad de que esté enfermo?

b) Después de seleccionar un pino del parque, se comprobó que estaba enfermo. ¿De qué variedad es menos probable que sea? ¿Cuál es esa probabilidad?

**Solución ejercicio 8**: Se definen los sucesos: $x \equiv$ "*pino de la variedad* $x$", con $x = A$, $B$, $C$, y por otro lado $D \equiv$ "*pino enfermo*" y $\bar{D} \equiv$ "*pino sano*". En el siguiente árbol de probabilidades queda representada la situación planteada en el enunciado del problema:




Los tres sucesos $A$, $B$ y $C$ constituyen un sistema completo de sucesos porque su unión es el suceso seguro y son mutuamente incompatibles. Esto es, no hay pinos que sean de dos variedades a la vez, y todos los pinos del parque son exclusivamente de una de las tres variedades mencionadas. El suceso $D$ (que aparece sombreado en la Figura 1) tiene intersección no nula con $A$, $B$ y $C$, ya que hay pinos enfermos de todas las variedades. En estas condiciones, podemos utilizar el *Teorema de la Probabilidad Total* y el *Teorema de Bayes*.

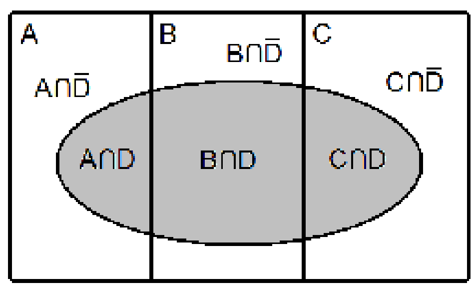



Figure 3: Situación del problema. El suceso D aparece sombreado.

**Apartado a)** Se pide calcular la probabilidad del suceso $D$. Puede calcularse la probabilidad total de que el pino escogido al azar esté enfermo utilizando el *Teorema de la Probabilidad Total*

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) \\ &= 0.75 \cdot 0.001 + 0.08 \cdot 0.006 + 0.17 \cdot 0.004 \\ &= 0.00191 \end{aligned}$$

Es decir, aproximadamente un 0.2% de los pinos están enfermos (o visto de otro modo, tan solo unos 2 pinos de cada 1000 pinos del parque están enfermos).

**Apartado b)** Para responder tenemos que calcular las probabilidades $P(x|D)$ con $x = A$, $B$, $C$, y determinar cuál es la menor de todas. Para esto utilizamos el *Teorema de Bayes*

$$P(x|D) = \frac{P(x)P(D|x)}{P(D)}, \quad x = A, B, C.$$

Utilizando el valor de $P(D) = 0.00191$ calculado en el apartado a), tenemos

$$\begin{aligned}
P(A|D) &= \frac{P(A)P(D|A)}{P(D)} = \frac{0.75 \cdot 0.001}{0.00191} \simeq 0.3927 \\
P(B|D) &= \frac{P(B)P(D|B)}{P(D)} = \frac{0.08 \cdot 0.006}{0.00191} \simeq 0.2513 \\
P(C|D) &= \frac{P(C)P(D|C)}{P(D)} = \frac{0.17 \cdot 0.004}{0.00191} \simeq 0.3560
\end{aligned}$$

Lo que implica que lo menos probable es que el pino sea de la variedad $B$.

**Ejercicio 9.-** Una empresa que fabrica bombillas LED posee tres máquinas $A$, $B$ y $C$, que producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de las bombillas producidas en la fábrica. Los porcentajes producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5% respectivamente. Contestar a las siguientes preguntas:

a) Seleccionada una bombilla al azar, calcular la probabilidad de que salga defectuosa.

b) Se toma al azar una bombilla, y resulta ser defectuosa. Calcular la probabilidad de haber sido fabricada en la máquina $B$.

c) ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido una bombilla defectuosa?

**Solución ejercicio 9:** Se definen los sucesos: $x \equiv$ {fábricada en máquina $x$}, con $x = A$, $B$, $C$, y por otro lado $D \equiv$ {bombilla defectuosa} y $\bar{D} \equiv$ {bombilla correcta}. En el siguiente árbol de probabilidades queda representada la situación planteada en el problema:

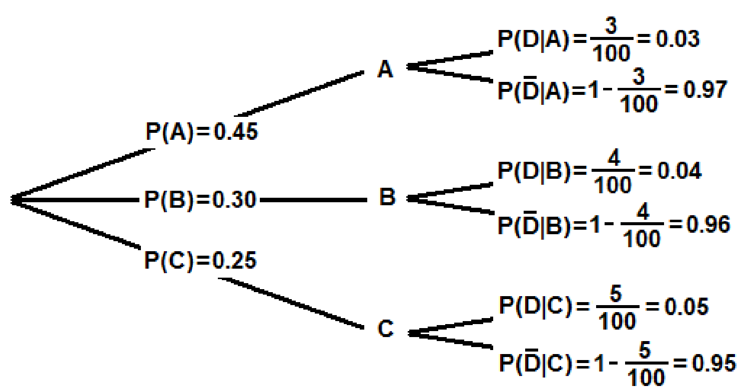



Figure 4: Árbol de probabilidades del problema

Los tres sucesos $A$, $B$ y $C$ constituyen un sistema completo de sucesos porque su unión es el suceso seguro y son mutuamente incompatibles. El suceso $D$ (que aparece sombreado en la Figura 4) tiene intersección no nula con $A$, $B$ y $C$, ya que puede haber bombillas defectuosas fabricadas en cada una de las tres máquinas. En estas condiciones, podemos utilizar el *Teorema de la Probabilidad Total* y el *Teorema de Bayes*.

**Apartado a)** Se pide calcular la probabilidad total del $D$, es decir, de que la bombilla escogida al azar sea defectuosa. Para ello utilizamos el *Teorema de la Probabilidad Total*

$$\begin{aligned}
P(D) &= P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) + P(C) \cdot P(D|C) \\
&= 0.45 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.05 \\
&= 0.038
\end{aligned}$$

**Apartado b)** Para responder tenemos que calcular la probabilidad $P(B|D)$ mediante el *Teorema de Bayes*

$$P(B|D) = \frac{P(B)P(D|B)}{P(D)} = \frac{0.30 \cdot 0.04}{0.038} \simeq 0.316$$

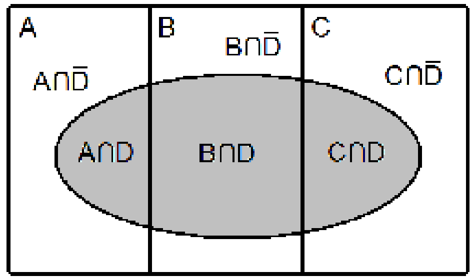



Figure 5: Situación del problema. El suceso D aparece sombreado

**Apartado c)** Para responder tenemos que calcular las probabilidades $P(x|D)$ con $x = A$, $B$, $C$, y determinar cuál es la menor de todas. La probabilidad $P(B|D)$ la hemos calculado en el apartado anterior. Utilizando el *Teorema de Bayes*, tenemos:

$$P(A|D) = \frac{P(A)P(D|A)}{P(D)} = \frac{0.45 \cdot 0.03}{0.038} \simeq 0.355$$

$$P(C|D) = \frac{P(C)P(D|C)}{P(D)} = \frac{0.25 \cdot 0.05}{0.038} \simeq 0.329$$

Por tanto, la máquina con mayor probabilidad de haber producido una bombilla defectuosa es $A$.

**Ejercicio 10.-** En una empresa el 20% de los empleados son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un cargo directivo y el 50% de los economistas también, mientras que los demás trabajadores (no ingenieros y no economistas) solamente el 20% ocupa un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?

**Solución ejercicio 10**

Definimos los sucesos $A$={ser ingenierio}, $B$={ser economista}, $C$={resto de trabajadores (no ingeniero y no economista)}, $D$={ocupar puesto directivo}, $\bar{D}$={no ocupar puesto directivo}. El árbol de probabilidades del problema es

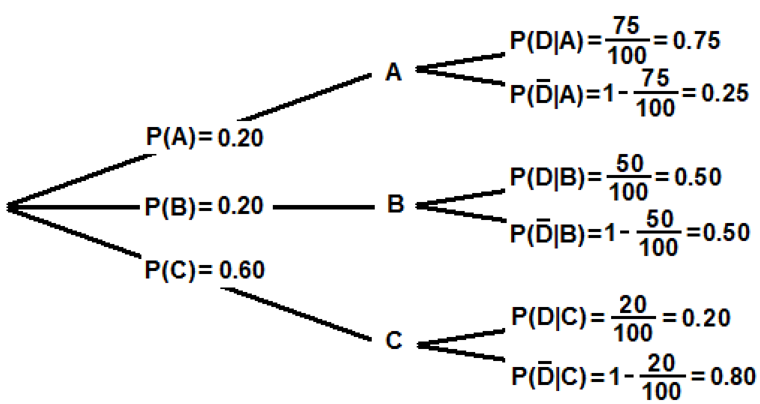



Figure 6: Árbol de probabilidades del problema

Para contestar a la pregunta necesitamos el Teorema de Bayes, dado que nos piden $P(A|D)$ (es decir, la probabilidad de que un empleado elegido al azar sea ingeniero, sabiendo de antemano que es directivo). Así

$$P(A|D) = \frac{P(A) \cdot P(D|A)}{P(D)}$$

Para obtener $P(D)$ necesitamos el Teorema de la Probabilidad Total

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)\cdot P(D|A) + P(B)\cdot P(D|B) + P(C)\cdot P(D|C) \\ &= 0.2\cdot 0.75 + 0.2\cdot 0.5 + 0.6\cdot 0.2 \\ &= 0.37. \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión del Teorema de Bayes, tenemos

$$P(A|D) = \frac{P(A)\cdot P(D|A)}{P(D)} = \frac{0.2\cdot 0.75}{0.37} = 0.40541.$$

**Ejercicio 11.-** En un estudio de ingeniería se calculan las estructuras para varios edificios. La tercera parte de las cimentaciones calculadas se realizan con hormigón de alta calidad y el resto con uno de calidad media. Para saber con qué tipo de hormigón se realizó una determinada cimentación se extrae de ella una probeta que, ensayada a compresión, da una resistencia de 200 $kg/cm^2$. Sabiendo que la probabilidad de que una probeta de hormigón de alta calidad resista un ensayo de 200 $kg/cm^2$ es de 0.6 y, que dicha probabilidad para el hormigón de calidad media es de 0.4, se pide averiguar cuál será la conclusión del estudio respecto a la cimentación de la que se extrajo la probeta.

**Solución ejercicio 11:** Definimos los sucesos $A_1$={hormigón de alta calidad}, $A_2$={hormigón de calidad media}, $R$={la probeta ensayada ha resistido 200 $kg/cm^2$}, $\bar{R}$={la probeta ensayada **no** ha resistido 200 $kg/cm^2$}. El árbol de probabilidades del problema es Para contestar a la pregunta necesitamos el Teorema de Bayes, dado

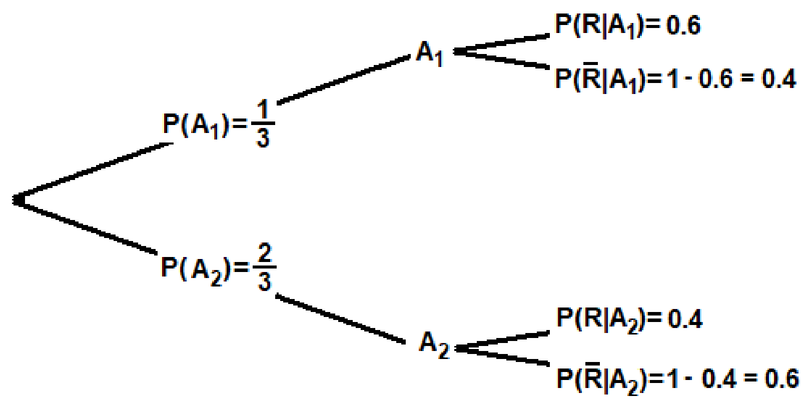



Figure 7: Árbol de probabilidades del problema

que, respecto a la cimentación de la que se extrajo la probeta, queremos saber con qué probabilidades se fabricó con hormigón de alta o de media calidad. Calculamos primero la probabilidad total de resistir al ensayo de 200 $kg/cm^2$, que es, según el Teorema de la Probabilidad Total

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A_1)\cdot P(R|A_1) + P(A_2)\cdot P(R|A_2) \\ &= \frac{1}{3}\cdot 0.6 + \frac{2}{3}\cdot 0.4 = 0.46667 \end{aligned}$$

Ahora, utilizando el Teorema de Bayes, extraemos las conclusiones pedidas

$$\begin{aligned} P(A_1|R) &= \frac{P(A_1)\cdot P(R|A_1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0.6}{0.46667} = 0.42857, \\ P(A_2|R) &= \frac{P(A_2)\cdot P(R|A_2)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0.4}{0.46667} = 0.57142. \end{aligned}$$

Luego, acerca de la cimentación de la que se extrajo la probeta, podemos decir que en un 42.857% de los casos se construyó con hormigón de alta calidad, y en un 57.142% de los casos, ha sido fabricada con hormigón de calidad media.

**Ejercicio 12.-** Se sabe que, en una determinada ciudad, la probabilidad de que un edificio tenga aluminosis es de 0.01. La probabilidad de que un *test de aluminosis** determine que un edificio tiene aluminosis, teniendo efectivamente el problema, es de 0.97. La probabilidad de que un test de aluminosis determine que un edificio tiene aluminosis, no teniendo ese problema, es de 0.001. Se elige un edificio al azar de esa ciudad y al realizarle el test, se determina que sí tiene el problema. ¿Cuál es la probabilidad de que el test de aluminosis haya dado el resultado correcto?

*Nota: estos test suelen incluir ensayos cualitativos, químicos y físicos en probetas-testigo de hormigón extraídas del edificio en estudio, ensayos de difracción de rayos X, uso de reveladores (fenolftaleína), etc.

**Solución ejercicio 12:**

Se definen los sucesos: $A =$"El edificio tiene aluminosis", y $B =$"El test de aluminosis determina que el edificio tiene aluminosis". Los sucesos $A$ y $\bar{A}$ constituyen un sistema completo de sucesos porque su unión es el suceso seguro y son mutuamente excluyentes (ver Figura 1)

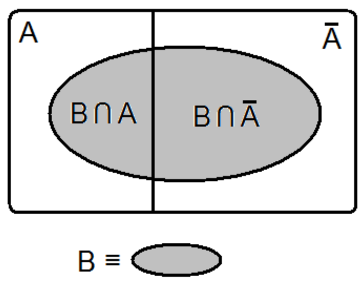



Figure 8: Sistema completo de sucesos del ejercicio

En estas condiciones podemos utilizar el *Teorema de la Probabilidad Total* y el *Teorema de Bayes*.

En base a los sucesos definidos anteriormente, los datos que proporciona el enunciado son:

1. La probabilidad de que un edificio tenga aluminosis es $P(A) = 0.01$.
2. La probabilidad de que un test de aluminosis determine que un edificio tiene aluminosis, teniendo ese problema es $P(B \mid A) = 0.97$.
3. La probabilidad de que un test de aluminosis diagnostique que un edificio tiene aluminosis, **no teniendo** ese problema es $P(B \mid \bar{A}) = 0.001$.

El suceso sobre el que nos preguntan es en realidad un suceso condicionado. Sabiendo *a priori* que el test de aluminosis ha determinado que sí existe el problema (se verifica de antemano el suceso $B$), queremos que este diagnóstico afirmativo haya ocurrido en un edificio que, efectivamente, tenga aluminosis (suceso $A$), luego este suceso puede expresarse como $(A \mid B)$. Es decir, el problema pide calcular la probabilidad $P(A \mid B)$. Según el Teorema de Bayes, esta probabilidad viene dada por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)}. \tag{3}$$

En la fórmula anterior conocemos las cantidades $P(A) = 0.01$ y $P(B \mid A) = 0.97$, pero aún no conocemos $P(B)$, por lo que hay que calcularlo. De acuerdo con el Teorema de la Probabilidad Total, en el sistema completo de sucesos considerado en la Figura 1, la probabilidad $P(B)$ viene dada por

$$P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(\bar{A})P(B \mid \bar{A}). \tag{4}$$

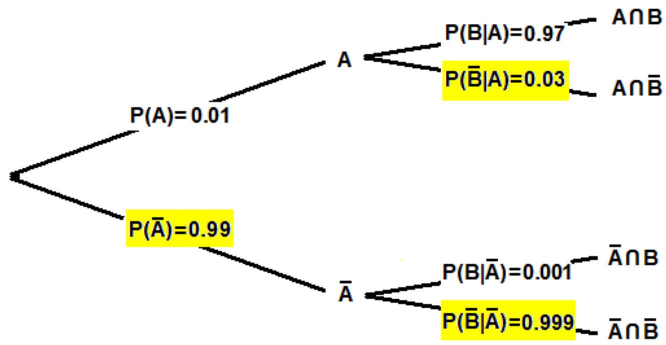



Figure 9: Árbol de probabilidades del problema

Si miramos el árbol de probabilidades del problema que aparece en la figura 2 vemos que $P(\bar{A}) = 0.99$ y $P(B \mid \bar{A}) = 0.001$. En el árbol aparecen destacadas en amarillo las probabilidades que no vienen dadas explícitamente en el enunciado del problema y que ha habido que calcular por separado. La probabilidad $P(\bar{B} \mid \bar{A}) = 0.999$ no la vamos a necesitar en este problema, pero no obstante ha sido calculada por completar el árbol de probabilidades.

Sustituyendo las cantidades que necesitamos en (4) tenemos

$$P(B) = 0.01 \cdot 0.97 + 0.99 \cdot 0.001 = 0.01069.$$

Reemplazando ahora en (3) tenemos finalmente la probabilidad pedida

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)} = \frac{0.01 \cdot 0.97}{0.01069} = 0.90739 \simeq 0.9074.$$

**Ejercicio 13 -** Un pescador acostumbra a ir a tres cotos de pesca diferentes, denominados $A$, $B$ y $C$. Un 20 % de los días de pesca se dirige hacia $A$, un 50 % de los días hacia $B$ y el resto hacia $C$. Las probabilidades que tiene de **no** pescar nada son de un 80 % en el coto $A$, de un 90 % en $B$ y de un 70 % en $C$.

a) Calcular la probabilidad de que obtenga alguna captura un día de pesca cualquiera.

b) Si un día ha conseguido pescar un pez, calcular la probabilidad de que haya sido capturado en el coto $A$ o en el $C$.

**Solución ejercicio 13**

**Apartado a)** Definimos los sucesos: $A \equiv$ "*pescador va al coto de pesca A*", $B \equiv$ "*pescador va al coto de pesca B*", $C \equiv$ "*pescador va al coto de pesca C*" y $D \equiv$ "*pescador consigue una o más capturas*". Obviamente el suceso contrario al $D$ podemos enunciarlo $\bar{D} \equiv$ "*pescador no consigue pescar nada*". El árbol de probabilidades del problema es el siguiente:

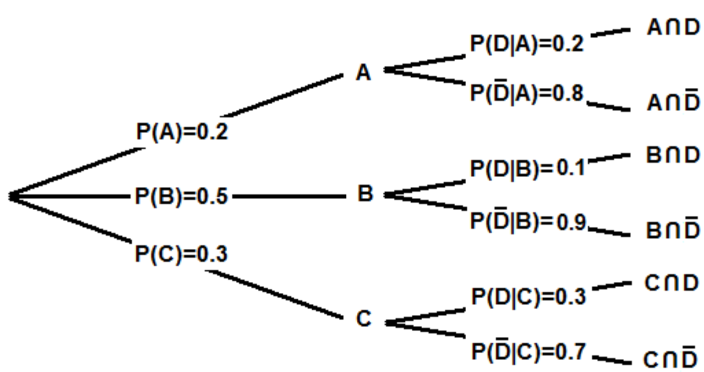



Figure 10: Sistema completo de sucesos del problema

Luego la probabilidad total de que el pescador obtenga alguna un día cualquiera de pesca podemos calcularla a través del Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) = P(A)P(D \mid A) + P(B)P(D \mid B) + P(C)P(D \mid C) = 0.2 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.3 = 0.18,$$

o también, visto de otro modo, si tenemos que

$$P(\bar{D}) = P(A)P(\bar{D} \mid A) + P(B)P(\bar{D} \mid B) + P(C)P(\bar{D} \mid C) = 0.2 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.7 = 0.82,$$

entonces $P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - 0.82 = 0.18$.

**Apartado b)** Nos piden la probabilidad de la unión de sucesos $(A \mid D) \cup (C \mid D)$. Estos son: $(A \mid D) \equiv$ "*Sabiendo que el pescador consiguió capturas, que las haya pescado en el coto $A$" y $(C \mid D) \equiv$ "Sabiendo que el pescador consiguió capturas, que las haya pescado en el coto $C$*". Como $(A \mid D)$ y $(C \mid D)$ son sucesos incompatibles (no puede ir a pescar a dos cotos diferentes al mismo tiempo), se cumple $(A \mid D) \cap (C \mid D) = \varnothing$ y por tanto $P\left((A \mid D) \cap (C \mid D)\right) = 0$. Así pues, usando el teorema de Bayes

$$P(A \mid D) = \frac{P(D \mid A)P(A)}{P(D)} = \frac{0.2 \cdot 0.2}{0.18} = 0.222, \qquad P(C \mid D) = \frac{P(D \mid C)P(C)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.18} = 0.5$$

y con estos valores

$$P\left((A \mid D) \cup (C \mid D)\right) = P(A \mid D) + P(C \mid D) - P\left((A \mid D) \cap (C \mid D)\right) = 0.222 + 0.5 - 0 = 0.722.$$