RESUMEN DE ALGUNAS TÉCNICAS PARA EL CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Tabla de primitivas elementales

$\int x^p\,dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$	$\int \dfrac{dx}{x} = L(x) + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int a^x\,dx = \dfrac{1}{La}\,a^x + C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos + C$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
$\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int \operatorname{Sh} x\,dx = \operatorname{Ch} x + C$	$\int \operatorname{Ch} x\,dx = \operatorname{Sh} x + C$
$\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{x}{a} + C$	

Técnicas básicas de integración

Integración por sustitución o cambio de variable (composición)

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=g(t)} = \int f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

Integración por partes (producto)

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx\Big|_{\substack{u=f(x)\\ v'=g'(x)}} = f(x)\,g(x)\Big|_{\substack{u=f(x)\\ v=g(x)}} - \int f'(x)\,g(x)\,dx\Big|_{\substack{u'=f'(x)\\ v=g(x)}}$$

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS CIRCULARES

Fórmulas de uso corriente:

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \qquad 1+\tan^2 x=\sec^2 x$$

$$\operatorname{sen}(mx+nx)=\operatorname{sen} mx\cos nx+\cos mx\operatorname{sen} nx$$

$$\cos(mx+nx)=\cos mx\cos nx-\operatorname{sen} mx\operatorname{sen} nx$$

$$\operatorname{sen} 2x=2\operatorname{sen} x\cos x \qquad \cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)\right)$$

$$\operatorname{sen} mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(mx+nx)+\operatorname{sen}(mx-nx)\right)$$

$$\operatorname{sen} mx\operatorname{sen} nx=\frac{1}{2}\left(\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)\right)$$

INTEGRAL DEL TIPO $\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m}{n}},\ldots,(ax+b)^{\frac{r}{s}}\right)dx$.

Cálculo de los elementos necesarios

$$ax+b=t^M$$

$$t=g^{-1}(x)=\sqrt[M]{(ax+b)}$$

siendo M el mínimo común múltiplo de los denominadores n,…,s

$$x=g(t)=\frac{1}{a}\left(t^M-b\right)$$

$$g'(t)=\frac{1}{a}M\cdot t^{M-1}$$

INTEGRAL DEL TIPO $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}},\ldots,x^{\frac{r}{s}}\right)dx$.

Cálculo de los elementos necesarios

$$x=t^M$$

$$t=g^{-1}(x)=\sqrt[M]{x}$$

siendo M el mínimo común múltiplo de los denominadores n,…,s

$$x=g(t)=t^M$$

$$g'(t)=M\cdot t^{M-1}$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES

Cambios a funciones trigonométricas o hiperbólicas:

Integrales del tipo: $\int R\left(x,\sqrt{a-(x-b)^2}\right)dx$

$$(x-b)=\sqrt{a}\operatorname{sen} t \rightarrow x'=\sqrt{a}\cos t$$

Integrales del tipo: $\int R\left(x,\sqrt{a+(x-b)^2}\right)dx$

$$(x-b)=\sqrt{a}\tan t \longrightarrow x'=\sqrt{a}\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$(x-b)=\sqrt{a}\operatorname{senh} t \rightarrow x'=\sqrt{a}\cosh t$$

Integrales del tipo: $\int R\left(x,\sqrt{(x-b)^2-a}\right)dx$

$$(x-b)=\sqrt{a}\sec t \longrightarrow x'=\sqrt{a}\sec t\cdot\tan t$$

$$(x-b)=\sqrt{a}\cosh t \longrightarrow x'=\sqrt{a}\operatorname{senh} t$$

FUNCIONES RACIONALES $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

- $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios
- Orden de $P(x) \geq$ orden $Q(x)$
  - Dividir poliniomios $\quad \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$
  - Descomponer $\quad \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$
- Orden de $R(x) <$ orden $Q(x)$
  - Descomposición en fracciones simples

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \ldots + \frac{B_{11}}{(x-b_1)} + \frac{B_{12}}{(x-b_1)^2} + \ldots + \frac{Mx+N}{((x-c)^2+d^2)} + \frac{Sx+T}{((x-c)^2+d^2)^2}$$

FUNCIONES RACIONALES $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

1) $\int \frac{A}{(x-r)}dx = A\,\mathrm{Ln}|x-r| + C$

2) $\int \frac{A}{(x-r)^n}dx = \frac{-A}{(n-1)(x-r)^{n-1}} + C$

3) $\int \frac{A}{((x-r)^2+s^2)}dx = \frac{A}{s}\arctan\frac{x-r}{s} + C$

4) $\int \frac{Ax+B}{((x-r)^2+s^2)}dx = \frac{A}{2}\mathrm{Ln}\left[(x-r)^2+s^2\right] + \frac{Ar+B}{s}\arctan\frac{x-r}{s} + C$

5) $\int \frac{Ax+B}{((x-r)^2+s^2)^n}dx = \frac{-A}{2(n-1)((x-r)^2+s^2)^{n-1}} +$

$+ (Ar+B)\int \frac{dx}{((x-r)^2+s^2)^{n-1}} + C$

INTEGRAL DEL TIPO $\int R(\mathrm{sen}\,x, \cos x)dx$.

- $R(\mathrm{sen}\,x, \cos x)$ **impar** en sen x.

$$t = g^{-1}(x) = \cos x$$
$$x = g(t) = \arccos t$$
$$g'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$$

- $R(\mathrm{sen}\,x, \cos x)$ **impar** en cos x.

$$t = g^{-1}(x) = \mathrm{sen}\,x$$
$$x = g(t) = \mathrm{arcsen}\,t$$
$$g'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

INTEGRAL DEL TIPO $\int R(\mathrm{sen}\,x, \cos x)dx$.

- $R(\mathrm{sen}\,x, \cos x)$ **par** en sen x y cos x.

$$t = g^{-1}(x) = \tan x \qquad \mathrm{sen}\,x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$x = g(t) = \arctan t$$
$$g'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

- $R(\mathrm{sen}\,x, \cos x)$ **no cumple** ninguna característica.

$$t = g^{-1}(x) = \tan\frac{x}{2} \qquad \mathrm{sen}\,x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$x = g(t) = 2\arctan t$$
$$g'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$