

Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva dada en polares aplicando la regla de la cadena

Dada $r = r(\theta)$, $\theta \in I$, con $r(\theta)$ derivable, se pretende calcular $y' = \frac{dy}{dx}$. Para ello se

tienen las relaciones $\begin{cases} y = r \operatorname{sen} \theta \\ x = r \operatorname{cos} \theta \end{cases}$.

Teniendo en cuenta $\begin{cases} r = r(\theta) \\ \theta = \theta(x) \end{cases} \Rightarrow \frac{dr}{dx} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dx}$, se derivan las relaciones anteriores

aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} \begin{cases} y = r \operatorname{sen} \theta \\ x = r \operatorname{cos} \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} \operatorname{sen} \theta + r \operatorname{cos} \theta \frac{d\theta}{dx} \\ 1 = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} \operatorname{cos} \theta - r \operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dx} \end{cases}$$

Dividiendo ambas expresiones, para eliminar $\frac{d\theta}{dx}$, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + r \operatorname{cos} \theta}{\frac{dr}{d\theta} \operatorname{cos} \theta - r \operatorname{sen} \theta}$$