Expresión de la integral que calcula la longitud de arco de una curva expresada en coordenadas polares

La longitud de un arco de curva $y = f(x), x \in [a,b]$ se calcula, siendo f una función con derivada continua en el intervalo $[a,b]$, mediante:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\, dx$$

Si la curva se expresara en coordenadas polares mediante $r = r(\theta), \theta \in [\theta_1, \theta_2]$, se cumplirían las relaciones $\begin{cases} y = r \operatorname{sen}\theta \\ x = r\cos\theta \end{cases}$, y además la pendiente de la recta tangente vendría dada por la expresión:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta\right)}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta\right)}$$

Se realiza un cambio de variable en la integral que calcula la longitud de arco en coordenadas cartesianas, de la variable $x \in [a,b]$ a la variable $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\, dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1+\left(\frac{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta\right)}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta\right)}\right)^2}\, \frac{dx}{d\theta}\, d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1+\left(\frac{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta\right)}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta\right)}\right)^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta\right) d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta\right)^2}\, d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$$

Finalmente, la fórmula a aplicar para calcular la longitud de una curva expresada en coordenadas polares mediante una función $r = r(\theta), \theta \in [\theta_1, \theta_2]$, con derivada continua es:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$$