10.7 Polinomios de Taylor y aproximación

Las cuatro secciones restantes de este capítulo están dedicadas al estudio de los polinomios y series de Taylor.

Aproximación polinómica de funciones elementales

El objetivo de esta sección es mostrar cómo se pueden utilizar tipos especiales de polinomios para aproximar otras funciones elementales. Para hallar un polinomio P que aproxime a una cierta función f, comenzamos escogiendo un número c en el dominio de f, en el que exigimos que P y f tengan el mismo valor. Así pues,

$$P(c) = f(c) \qquad \text{Las gráficas de } P \text{ y } f \text{ pasan por } (c, f(c))$$

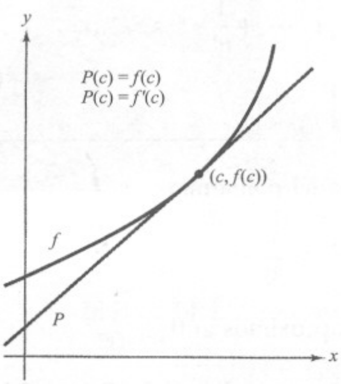


FIGURA 10.7

Diremos entonces que la aproximación polinómica está **centrada en *c***. Geométricamente, exigir que $P(c) = f(c)$ significa que la gráfica de P pasa por el punto $(c, f(c))$. Claro está que hay muchos polinomios cuyas gráficas pasan por ese punto. Nuestro objetivo es encontrar uno cuya gráfica sea análoga a la de f cerca de ese punto. Una forma de conseguirlo consiste en imponer la condición adicional de que la pendiente de la función polinómica sea la misma que la de la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$. Es decir, exigimos que

$$P'(c) = f'(c) \qquad \text{Las gráficas de } P \text{ y } f \text{ tienen la misma pendiente en } (c, f(c))$$

Con ese par de requisitos podemos obtener una sencilla aproximación lineal de f, como muestra la Figura 10.7. El Ejemplo 1 ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 1 Aproximación polinómica de primer grado de $f(x) = e^x$

Hallar, para la función $f(x) = e^x$, una función polinómica de primer grado

$$P_1(x) = a_1x + a_0$$

cuyo valor y cuya pendiente coincidan con los de f en $x = 0$.

Solución: Como $f(x) = e^x$ y $f'(x) = e^x$, el valor de f y de su pendiente en $x = 0$ vienen dados por

$$f(0) = e^0 = 1 \quad \text{y} \quad f'(0) = e^0 = 1$$

Ahora bien, al ser $P_1(x) = a_1x + a_0$, imponiendo la condición de que $P_1(0) = f(0)$ se obtiene $a_0 = 1$. Además, como $P_1'(x) = a_1$, la condición $P_1'(0) = f'(0)$ lleva a concluir que $a_1 = 1$. Por tanto,

$$P_1(x) = x + 1$$

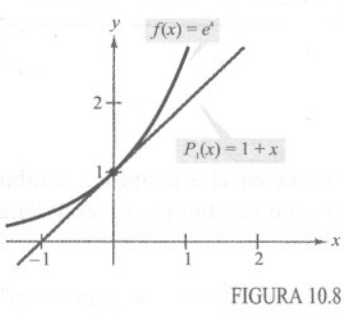


FIGURA 10.8

La Figura 10.8 muestra las gráficas de $P_1(x) = x + 1$ y $f(x) = e^x$. □

En la Figura 10.8 vemos que en los puntos cercanos al (0, 1) la gráfica de $P_1(x) = x + 1$ es razonablemente parecida a la de $f(x) = e^x$. Sin embargo, al alejarnos de (0, 1) las gráficas se separan y la aproximación ya no es buena. Con el fin de mejorar la aproximación, podemos imponer otra restricción: que los valores de las segundas derivadas de P y f coincidan en $x = 0$. El polinomio de menor grado que satisface los tres requisitos conjuntamente, a saber $P_2(0) = f(0)$, $P_2'(0) = f'(0)$ y $P_2''(0) = f''(0)$, se puede probar que es

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

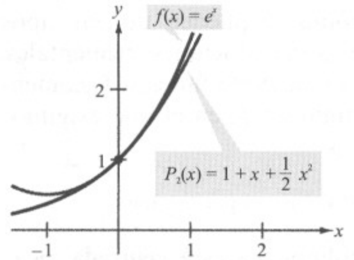


FIGURA 10.9

Vemos además en la Figura 10.9 que P_2 es mejor aproximación de f que P. Si continuamos con este proceso, exigiendo que los valores de un polinomio $P_n(x)$ y de sus n primeras derivadas coincidan con los correspondientes de $f(x) = e^x$ en $x = 0$, obtenemos como solución

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \approx e^x$$

EJEMPLO 2 *Aproximación polinómica de tercer grado para $f(x) = e^x$*

Elaborar una tabla comparando los valores del polinomio

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$$

con los de $f(x) = e^x$ en varios valores de x próximos al 0.

Solución: Con una calculadora obtenemos los resultados de la Tabla 10.3. Nótese que para $x = 0$ las dos funciones tienen el mismo valor, pero al alejarnos del 0 la precisión de la aproximación $P_3(x)$ decrece.

TABLA 10.3

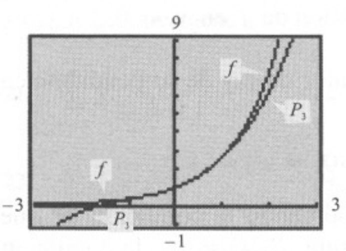
x	$-1{,}0$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0	0,1	0,2	1,0
e^x	0,3679	0,81873	0,904837	1	1,105171	1,2214	2,7183
$P_3(x)$	0,3333	0,81867	0,904833	1	1,105167	1,2213	2,6667

□

TECNOLOGIA. En una calculadora gráfica o en un ordenador se pueden comparar las gráficas de f y del polinomio aproximante. La figura muestra, en concreto, la gráfica de

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

comparada con la de $f(x) = e^x$. Compare del mismo modo las gráficas de P_4, P_5 y P_6 con la de f. ¿Qué le sugieren?



P_3 es la aproximación polinómica de tercer orden de $f(x) = e^x$

Polinomios de Taylor y de Maclaurin

La aproximación polinómica de $f(x) = e^x$ dada en el Ejemplo 2 estaba centrada en $c = 0$. Para desarrollos centrados en un c cualquiera, conviene escribir el polinomio en la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + \cdots + a_n(x - c)^n$$

De ese modo, las derivaciones sucesivas dan como resultado

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= a_1 + 2a_2(x - c) + 3a_3(x - c)^2 + \cdots + na_n(x - c)^{n-1}\\
P_n''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - c) + \cdots + n(n - 1)a_n(x - c)^{n-2}\\
P_n'''(x) &= 2 \cdot 3a_3 + \cdots + n(n - 1)(n - 2)a_n(x - c)^{n-3}\\
&\vdots\\
P_n^{(n)}(x) &= n(n - 1)(n - 2) \cdots (2)(1)a_n
\end{aligned}$$


Brook Taylor

Haciendo $x = c$, se obtiene

$$P_n(c) = a_0, \quad P_n'(c) = a_1, \quad P_n''(c) = 2a_2, \quad \ldots, \quad P_n^{(n)}(c) = n!a_n$$

y puesto que los valores de f y de sus n primeras derivadas deben coincidir con los de P_n en $x = c$, se deduce que

$$f(c) = a_0, \qquad f'(c) = a_1, \qquad \frac{f''(c)}{2!} = a_2, \quad \ldots, \quad \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = a_n$$

Con esos coeficientes obtenemos la siguiente definición de los **polinomios de Taylor,** así llamados en honor del matemático inglés Brook Taylor (1685-1731). Aunque Taylor no fue el primero en vislumbrar la posibilidad de aproximar mediante polinomios funciones trascendentes, su publicación de 1715 constituye el primer trabajo sistemático sobre esta cuestión.

DEFINICION DEL n-ESIMO POLINOMIO DE TAYLOR Y DE MACLAURIN

Si f tiene n derivadas en c, el polinomio

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

se llama el **n-ésimo polinomio de Taylor de f centrado en c.** Si $c = 0$, entonces

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

se llama el **n-ésimo polinomio de Maclaurin de f.**

Nota. El nombe lo reciben estos últimos en honor del matemático inglés Colin Maclaurin (1698-1746).

EJEMPLO 3 Un polinomio de Maclaurin para $f(x) = e^x$

De acuerdo con lo visto antes en esta sección, el n-ésimo polinomio de Maclaurin de $f(x) = e^x$ viene dado por

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \qquad \square$$

EJEMPLO 4 Polinomios de Taylor para ln x

Hallar los polinomios de Taylor P_0, P_1, P_2, P_3 y P_4 para $f(x) = \ln x$, centrados en $c = 1$.

Solución: Desarrollando respecto de $c = 1$ se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} & f'(1) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} & f''(1) &= -1 \\ f'''(x) &= \frac{2!}{x^3} & f'''(1) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{3!}{x^4} & f^{(4)}(1) &= -6 \end{aligned}$$

Por tanto, los polinomios de Taylor pedidos son:

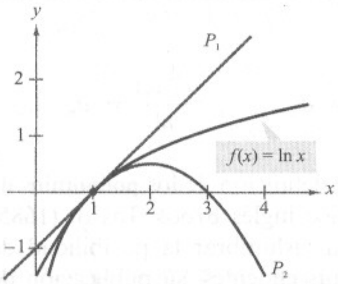
$$P_0(x) = f(1) = 0$$

$$P_1(x) = P_0(x) + f'(1)(x - 1) = (x - 1)$$

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2$$

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{f'''(1)}{3!}(x - 1)^3 = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$$

$$\begin{aligned} P_4(x) &= P_3(x) + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x - 1)^4 \\ &= (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 \end{aligned}$$



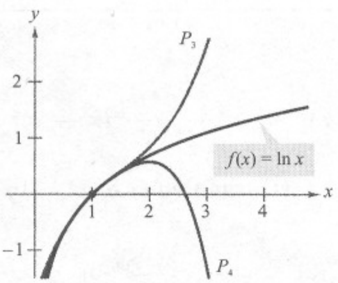


FIGURA 10.10

La Figura 10.10 compara sus gráficas con la de f. Nótese que cerca de $x = 1$ las gráficas son prácticamente indistinguibles. □

EJEMPLO 5 Polinomios de Maclaurin para cos x

Hallar los polinomios de Maclaurin P_0, P_2, P_4 y P_6 para $f(x) = \cos x$. Usar P_6 para aproximar el valor de cos (0,1).

Solución: Desarrollando respecto de $c = 0$ resulta

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x & f'''(0) &= 0 \end{aligned}$$

Por derivaciones sucesivas se puede ver que el esquema 1, 0, -1, 0 se repite, de modo que los polinomios de Maclaurin pedidos son

$$P_0(x) = f(0) = 1$$

$$P_2(x) = P_0(x) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - \frac{1}{2!}x^2$$

$$P_4(x) = P_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$P_6(x) = P_4(x) + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$$

Usando $P_6(x)$ obtenemos como aproximación cos (0,1) $\approx$ 0,995004165, que coincide con el valor que da la calculadora hasta el noveno decimal. □

EJEMPLO 6 Un polinomio de Taylor para sen x

Hallar el tercer polinomio de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$, centrado en $c = \pi/6$.

Solución: Desarrollando respecto de $c = \pi/6$ se obtiene

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Así pues, el tercer polinomio de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$, centrado en $c = \pi/6$, es

$$P_3(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2\cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 \qquad \square$$

Para aproximar el valor de una función en un punto específico podemos usar polinomios de Taylor o de Maclaurin. Así, para aproximar el valor de ln (1,1) podemos utilizar polinomios de Taylor de $f(x) = \ln x$ centrados en $c = 1$, como en el Ejemplo 4; o bien polinomios de Maclaurin como en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 7 Aproximación usando polinomios de Maclaurin

Aproximar, usando el cuarto polinomio de Maclaurin, el valor de ln (1,1).

Solución: Como 1,1 esta más cerca de 1 que de 0, consideramos polinomios de Maclaurin para la función $g(x) = \ln(1 + x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(1+x) & g(0) &= 0 \\ g'(x) &= (1+x)^{-1} & g'(0) &= 1 \\ g''(x) &= -(1+x)^{-2} & g''(0) &= -1 \\ g'''(x) &= 2(1+x)^{-3} & g'''(0) &= 2 \\ g^{(4)}(x) &= -6(1+x)^{-4} & g^{(4)}(0) &= -6 \end{aligned}$$

Como vemos, se obtienen los mismos coeficientes que en el Ejemplo 4. Por tanto, el cuarto polinomio de Maclaurin para $g(x) = \ln(1 + x)$ es

$$\begin{aligned} P_4(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \ln(1,1) &= \ln(1 + 0,1) \approx P_4(0,1) \\ &= (0,1) - \frac{1}{2}(0,1)^2 + \frac{1}{3}(0,1)^3 - \frac{1}{4}(0,1)^4 \\ &\approx 0,0953083. \end{aligned}$$

Compruebe que el cuarto polinomio de Taylor (del Ejemplo 4), evaluado en $x = 1,1$, da el mismo resultado. □

La Tabla 10.4 ilustra la precisión de la aproximación por polinomios de Taylor con relación al valor que da la calculadora para ln (1,1). Se observa que cuando n crece $P_n(1,1)$ se va acercando al valor de la calculadora, que es 0,0953102.

TABLA 10.4. Aproximaciones de ln (1,1) usando polinomios de Taylor

n	1	2	3	4
$P_n(1,1)$	0,1000000	0,0950000	0,0953333	0,0953083

Por otra parte, la Tabla 10.5 enseña que cuando nos alejamos del punto central del desarrollo, $c = 1$, la precisión de la aproximación disminuye.

TABLA 10.5. Aproximaciones de $\ln x$ usando polinomios de Taylor

x	1,0	1,1	1,5	1,75	2,0
$\ln x$	0,0000000	0,0953102	0,4054651	0,5596158	0,6931472
$P_4(x)$	0,0000000	0,0953083	0,4010417	0,5302734	0,5833333

Las Tablas 10.4 y 10.5 ponen de manifiesto dos aspectos muy importantes referentes a la precisión de los polinomios de Taylor (o de Maclaurin) cuando se utilizan para aproximar valores de funciones.

1. La aproximación suele ser mejor en valores de x próximos a c.
2. La aproximación suele ser mejor con polinomios de Taylor (o de Maclaurin) de grado alto que con los de grado bajo.

El resto de un polinomio de Taylor

Un método de aproximación es de poco valor si no se tiene idea de su precisión. Para medir la precisión al aproximar un valor funcional $f(x)$ por el polinomio de Taylor $P_n(x)$, usamos el concepto de **resto**, $R_n(x)$, definido así:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Valor exacto}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{Valor aproximado}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Resto}}$$

Luego, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, y llamamos al valor absoluto de $R_n(x)$ el **error** asociado a la aproximación. Es decir,

$$\boxed{\text{error} = |R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|}$$

El próximo teorema da un procedimiento general para estimar el resto asociado a un polinomio de Taylor. Este importante resultado se llama **teorema de Taylor** y el resto que en él se encuentra se llama la **forma de Lagrange para el resto.**

TEOREMA 10.19 TEOREMA DE TAYLOR

Si una función f es derivable hasta el orden $n + 1$ en un intervalo I conteniendo a c, entonces para cada x en I existe un z entre x y c tal que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)$$

donde $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Demostración: Para hallar $R_n(x)$ fijamos x en $I(x \neq c)$ y escribimos

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

donde $P_n(x)$ es el n-ésimo polinomio de Taylor para $f(x)$. Definamos ahora

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}}$$

La razón de definir esta g es que su derivada respecto de t tiene efecto telescópico. De hecho,

$$\frac{d}{dt}[-f(t) - f'(t)(x-t)] = -f'(t) + f'(t) - f''(t)(x-t) = -f''(t)(x-t)$$

De manera que la derivada $g'(t)$ se simplifica a

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + (n+1)R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-c)^{n+1}}$$

para todo t entre c y x. Además, para un x fijado,

$$g(c) = f(x) - [P_n(x) + R_n(x)] = f(x) - f(x) = 0$$

y $$g(x) = f(x) - f(x) - 0 - \cdots - 0 = f(x) - f(x) = 0$$

Por tanto, g satisface las condiciones del teorema de Rolle, y se sigue que existe un número z entre c y x tal que $g'(z) = 0$. Sustituyendo z por t en la ecuación de $g'(t)$ y despejando $R_n(x)$, obtenemos

$$g'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + (n+1)R_n(x)\frac{(x-z)^n}{(x-c)^{n+1}} = 0$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Finalmente, como $g(c) = 0$, concluimos que

$$0 = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \cdots - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n - R_n(x)$$

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)$$

Al aplicar el teorema de Taylor, no esperamos ser capaces de hallar el valor exacto de z. (Si pudiéramos lograr tal cosa, no sería necesaria una aproximación.) Más bien intentamos encontrar cotas para $f^{(n+1)}(z)$, que nos darán una idea de cómo es de grande el resto $R_n(x)$. Esta situación se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Determinando la precisión de una aproximación

El tercer polinomio de Maclaurin para sen x es

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Usar el teorema de Taylor para aproximar sen (0,1) por $P_3(0{,}1)$ y determinar la precisión de tal aproximación.

Solución: Por el teorema de Taylor, sabemos que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4$$

donde $0 < z < 0{,}1$. Luego

$$\operatorname{sen}(0{,}1) \approx 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^3}{3!} \approx 0{,}1 - 0{,}000167 = 0{,}099833$$

Como $f^{(4)}(z) = \operatorname{sen} z$ y la función seno es creciente en el intervalo $[0, 0{,}1]$, se sigue que $0 < \operatorname{sen} z < 1$ así que

$$0 \leqslant R_n(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{4!}(0{,}1)^4 < \frac{0{,}0001}{4!} \approx 0{,}000004$$

y concluimos que

$$0{,}099833 \leqslant \operatorname{sen}(0{,}1) \leqslant 0{,}099837$$ □

EJEMPLO 9 Aproximando un valor funcional con precisión prefijada

Hallar el grado del polinomio de Taylor centrado en $c = 1$ que debe usarse para aproximar ln (1,2) con error menor que 0,001.

Solución: Siguiendo la pauta del Ejemplo 4, vemos que la $(n+1)$-ésima derivada de $f(x) = \ln x$ viene dada por

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{n!}{x^{n+1}}$$

Según el teorema de Taylor, el error $|R_n(1{,}2)|$ viene dado por

$$|R_n(1{,}2)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(1{,}2-1)^{n+1}\right| = \frac{n!}{z^{n+1}}\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)(0{,}2)^{n+1}$$
$$= \frac{(0{,}2)^{n+1}}{z^{n+1}(n+1)}$$

donde $1 < z < 1{,}2$. En este intervalo, $|f^{(n+1)}(z)|$ es máximo en $z = 1$, luego estamos buscando un n tal que

$$\frac{(0{,}2)^{n+1}}{(1)^{n+1}(n+1)} < 0{,}001 \quad \Rightarrow \quad 1000 < (n+1)5^{n+1}.$$

Ensayando, se ve que el n más pequeño que satisface eso es $n = 3$. Así pues, necesitaríamos el tercer polinomio de Taylor para tener la precisión deseada. □

Ejercicios de la Sección 10.7

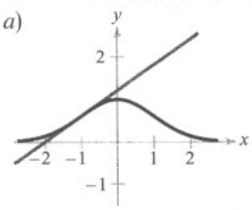
En los Ejercicios 1-4, poner en correspondencia cada aproximación por polinomios de Taylor de la función $f(x) = e^{-x^2/2}$ con su gráfica.

1. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ **2.** $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

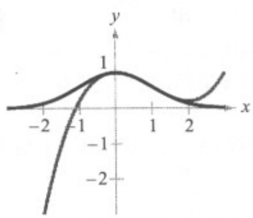
3. $y = e^{-1/2}[(x+1) + 1]$

4. $y = e^{-1/2}\left[\frac{1}{3}(x-1)^3 - (x-1) + 1\right]$

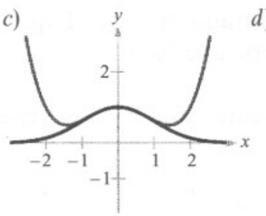
a)



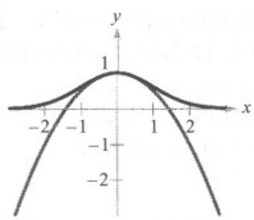
b)



c)



d)



En los Ejercicios 5-16, hallar el polinomio de Maclaurin de grado n para la función dada

5. $f(x) = e^{-x}$, $n = 3$ **6.** $f(x) = e^{-x}$, $n = 5$

7. $f(x) = e^{2x}$, $n = 4$ **8.** $f(x) = e^{3x}$, $n = 4$

9. $f(x) = \text{sen}\, x$, $n = 5$ **10.** $f(x) = \text{sen}\, \pi x$, $n = 3$

11. $f(x) = xe^x$, $n = 4$ **12.** $f(x) = x^2e^{-x}$, $n = 4$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $n = 4$ **14.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $n = 4$

15. $f(x) = \text{tg}\, x$, $n = 3$ **16.** $f(x) = \sec x$, $n = 2$

En los Ejercicios 17-20, hallar el polinomio de Taylor de grado n centrado en c.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $n = 4$, $c = 1$

18. $f(x) = \sqrt{x}$, $n = 4$, $c = 4$

19. $f(x) = \ln x$, $n = 4$, $c = 1$

20. $f(x) = x^2 \cos x$, $n = 2$, $c = \pi$

21. *a)* Usar los polinomios de Maclaurin $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$ y $P_7(x)$ correspondientes a $f(x) = \text{sen}\, x$ para completar la tabla adjunta.

x	0	0,25	0,50	075	1,00
sen x	0	0,2474	0,4794	0,6816	0,8415
$P_1(x)$					
$P_3(x)$					
$P_5(x)$					
$P_7(x)$					

b) Representar en un ordenador $f(x) = \text{sen}\, x$ y los polinomios de Maclaurin del apartado *a*).

22. *a)* Usar los polinomios de Taylor $P_1(x)$ y $P_4(x)$ asociados a $f(x) = \ln x$, centrados en $c = 1$, para completar la tabla.