ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

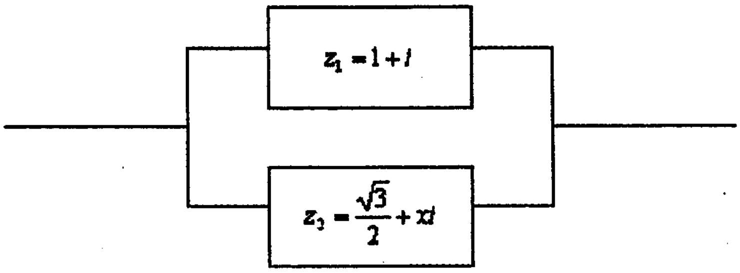
EXAMEN DE CÁLCULO I

2 de febrero de 2005

Tiempo: 2 hora 15 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la Escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 16 de febrero de 2005.
Fecha revisión: 17 febrero de 2005.

PROBLEMA 1.

En un circuito de corriente alterna se disponen dos impedancias en paralelo $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + xi, \quad x \in \mathbb{R}$. Sabiendo que la impedancia total z_T viene dada por $\frac{1}{z_T} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$, se pide el valor de x tal que z_T sea un número real. ¿Podría conseguirse un valor de x tal que z_T fuera un número imaginario puro?



PROBLEMA 2.

a) Expresar la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x, \quad x \geq -y\}$ en forma polar.

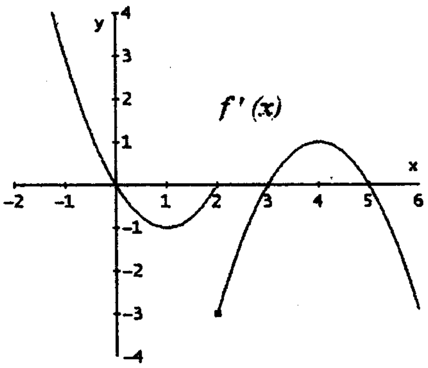
b) Expresar en coordenadas polares la familia de circunferencias con centro en el eje polar y que pasan por el polo. Encontrar la circunferencia del haz anterior tal que el área de la región D interior a dicha circunferencia vale $(\pi + 2)u^2$.

c) Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x, \ y \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}x, x^2 + (y - \sqrt{3})^2 \leq 3\}$. Hallar el volumen generado al girar la región C alrededor de la recta $y = -2$.

d) Calcular el volumen de un sólido de base la región C donde las secciones perpendiculares al eje OX son triángulos rectángulos isósceles con un cateto en el plano XOY.

PROBLEMA 3.

Sabiendo que la gráfica representa la derivada f' de una función **continua** f.



a) Identificar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) ¿Para qué valores de x la función f es cóncava hacia arriba?.

c) Identificar, si existen, máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función f.

d) Representar, según el resultado de los apartados anteriores, una posible gráfica de $f(x)$ considerando $f(0) = 0$.

PROBLEMA 4.

Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = ax^3$ con $a \in \mathbb{R}$. Representar ambas familias según los valores de sus parámetros respectivos.

PROBLEMA 5.

Demostrar el siguiente teorema:

"Si $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces es continua en $x = a$."

Problema 1: 1 pto. Problema 2: 4 ptos. Problema 3: 2 ptos. Problema 4: 1,5 ptos.

Problema 5: 1,5 ptos.

Problema 1.

En un circuito de corriente alterna se disponen dos impedancias en paralelo $z_1 = 1+i$ y $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + xi, \quad x \in \mathbb{R}$. Sabiendo que la impedancia total z_T viene dada por $\frac{1}{z_T} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$, se pide el valor de x para que z_T sea un número real. ¿Podría conseguirse una valor de x tal que z_T fuera un número imaginario puro?

Solución

- $$\frac{1}{z_T} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + xi} + \frac{1}{1+i} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - xi}{\frac{3}{4} + x^2} + \frac{1-i}{2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_T \in \mathbb{R}.$$

Ya que si z es real con b=0 entonces: $z = a+ib \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - xi}{\frac{3}{4} + x^2} + \frac{1-i}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{-x}{\frac{3}{4} + x^2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{2} = -1 \pm \frac{1}{2}$$

La s soluciones posibles son -1/2 y -3/2

Igualmente si z es complejo puro entonces su inverso también, luego sería si la parte real fuese cero:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - xi}{\frac{3}{4} + x^2} + \frac{1-i}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4} + x^2} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{8} + x^2\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^2 = -\sqrt{3} - \frac{3}{4} < 0$$

Que no tiene solución real. No es posible que la impedancia sea imaginario puro.

$$\frac{1}{1+i} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + x \cdot i}$$

$$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{4\cdot x^2 + 3} + \frac{1}{2} - i\cdot\left(\frac{4\cdot x}{4\cdot x^2 + 3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{4\cdot x}{4\cdot x^2 + 3} + \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{4\cdot x}{4\cdot x^2 + 3} + \frac{1}{2},\ x\right)$$

$$x = -\frac{3}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{1+i}+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+xi}}$$

$$\frac{4\cdot x^2+4\cdot\sqrt{3}+3}{4\cdot x^2+8\cdot x+4\cdot\sqrt{3}+11}+\frac{i\cdot(4\cdot x^2+8\cdot x+3)}{4\cdot x^2+8\cdot x+4\cdot\sqrt{3}+11}$$

$$\frac{4\cdot x^2+8\cdot x+3}{4\cdot x^2+8\cdot x+4\cdot\sqrt{3}+11}$$

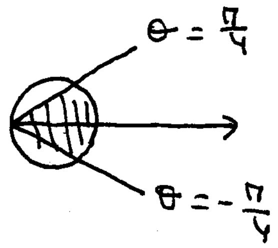
$$\frac{4\cdot x^2+8\cdot x+3}{4\cdot x^2+8\cdot x+4\cdot\sqrt{3}+11}$$

Problema 2

a) $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \,\text{sen}\,\theta \end{cases}$; $y = x \Rightarrow \rho\,\text{sen}\,\theta = \rho\cos\theta \rightarrow tg\,\theta = 1 \begin{cases} \nearrow \theta_1 = \pi/4 \\ \searrow \theta_2 = -\frac{3\pi}{4} \end{cases}$

$y = -x \Rightarrow \rho\,\text{sen}\,\theta = -\rho\cos\theta \rightarrow tg\,\theta = -1 \begin{cases} \nearrow \theta_1 = -\pi/4 \\ \searrow \theta_2 = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

$$\boxed{D = \{(\rho,\theta) \,/\, -\tfrac{\pi}{4} \le \theta \le \tfrac{\pi}{4}\},\ \rho \ge 0}$$



b) Familia de circunferencias: $\rho = 2a\cos\theta$;

Área en polares: $\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\,d\theta$

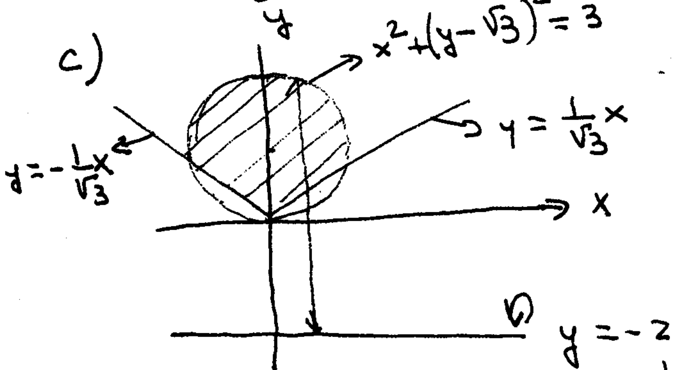
$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2a\cos\theta)^2 d\theta = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (2a\cos\theta)^2 d\theta$$

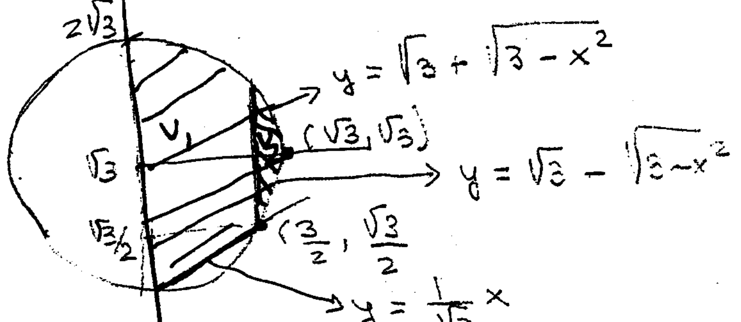
↑ función simétrica respecto al eje polar e intervalo simétrico.

$$A = 4a^2\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\,d\theta = 4a^2\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = 2a^2\left[\theta + \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = a^2\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$$

$$a^2\left(\frac{\pi}{2}+1\right) = \pi + 2 \rightarrow a = \pm\sqrt{2} \rightarrow \boxed{a = \sqrt{2}}$$ → única solución válida, en este caso

c)





Puntos de corte: $\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \\ x^2+(y-\sqrt{3})^2 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = \frac{3}{2},\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x \\ x^2+(y-\sqrt{3})^2 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = -\frac{3}{2},\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ || La región es simétrica respecto al eje OY. El volumen podemos calcularlo como: $V_t = 2(V_1+V_2) = 2V$

<u>volumen por discos</u> $V = \pi\int_{x_1}^{x_2} r^2(x)\,dx$; radio de giro: $r_i = y_i + 2$

$$V_1 = \pi\int_0^{3/2}\left[\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{3-x^2}\right)^2 - \left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2\right]dx = \pi\int_0^{3/2}\left(6+4\sqrt{3} - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4x}{\sqrt{3}} + 2(2+\sqrt{3})\sqrt{3-x^2}\right)dx$$

$$V_2 = \pi\int_{3/2}^{\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{3-x^2}\right)^2 - \left(2+\sqrt{3}-\sqrt{3-x^2}\right)^2\right]dx = \pi\int_{3/2}^{\sqrt{3}} 4(2+\sqrt{3})\sqrt{3-x^2}\,dx$$

$$V_1 = \pi\left[(6+4\sqrt{3})x - \frac{4}{9}x^3 + \frac{2x^2}{\sqrt{3}}\right]_0^{3/2} + \pi(2+\sqrt{3})2\int_0^{3/2}\underset{*}{\sqrt{3-x^2}}\,dx = \pi\left[\frac{27}{4}+\frac{7\sqrt{3}}{2}+(2+\sqrt{3})\frac{\pi}{3}\right]$$

$$V_2 = \pi(2+\sqrt{3})4\int_{3/2}^{\sqrt{3}}\underset{*}{\sqrt{3-x^2}}\,dx = \pi\left[(2+\sqrt{3})\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})\right]$$

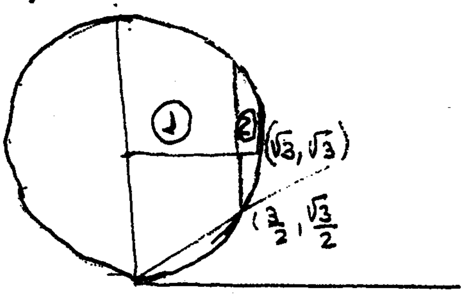
$$* \; I = \int\sqrt{3-x^2}\,dx \underset{x=\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,t}{=} 3\int\cos^2 t\,dt = \frac{3}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt = \frac{3}{2}\left(t+\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2t\right) =$$

$\mathrm{sen}\,2t \to 2\,\mathrm{sen}\,t\cos t \to 2\,\mathrm{sen}\,t\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t}$

$$= \frac{3}{2}\left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}}\right]$$

$$V = \pi\left[45+\sqrt{3} + (2+\sqrt{3})\frac{8\pi}{3}\right]u^3$$

d)



$$V = \int_{x_1}^{x_2} A(x)\,dx \quad ; \quad A(x) = \frac{1}{2}c^2(x)$$

El cateto de los triángulos que corresponde a la región 1: $\boxed{c_1(x) = \sqrt{3}+\sqrt{3-x^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}x}$

Los triángulos de la región 2:

$$c_2(x) = \left(\sqrt{3}+\sqrt{3-x^2}\right) - \left(\sqrt{3}-\sqrt{3-x^2}\right) = 2\sqrt{3-x^2}$$

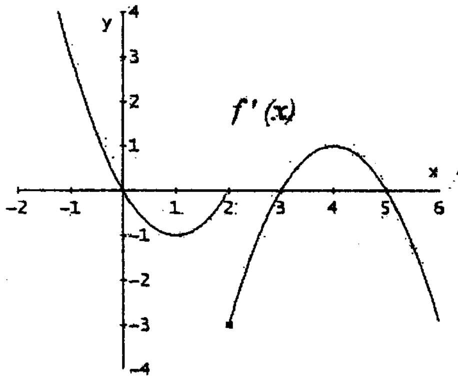
Como la región es simétrica respecto OY.

$$V = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{3/2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{3-x^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3-x^2}\right)^2 dx\right]$$

$$V = \int_0^{3/2}\left(6-\frac{2}{3}x^2-2x-2x\sqrt{3-x^2}\right)dx + 4\int_{3/2}^{\sqrt{3}}(3-x^2)\,dx$$

$$V = \left[6x - \frac{2x^3}{9} - x^2 + \frac{2}{3}(3-x^2)^{3/2}\right]_0^{3/2} + 4\left[3x-\frac{x^3}{3}\right]_{3/2}^{\sqrt{3}} = \left(-\frac{15}{2}+\frac{25}{4}\sqrt{3}\right)u^3$$

PROBLEMA 3



A la vista de la gráfica, la función $f'(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ excepto en el punto $x = 2$, siendo:

Signo de la derivada

- Positiva $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (-\infty, 0) \cup (3, 5)$
- Negativa $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (0, 2) \cup (2, 3) \cup (5, \infty)$

Crecimiento de la derivada

- Creciente $\forall x \in (1, 2) \cup (2, 4)$
- Decreciente $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

a) A partir del **<u>signo de la función derivada</u>**:

$f(x)$ es creciente $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (3, 5)$

$f(x)$ es decreciente $\forall x \in (0, 2) \cup (2, 3) \cup (5, \infty)$

En el punto $x = 2$ la función $f(x)$ también es decreciente ya que para $\delta > 0$ suficientemente pequeño se verifica $\begin{cases} f'(2-\delta) < 0 \\ f'(2+\delta) < 0 \end{cases}$, no cambia el carácter de crecimiento de la función.

$f(x)$ es decreciente $\forall x \in (0, 3) \cup (5, \infty)$

b) A partir de los **<u>intervalos de crecimiento de la función derivada</u>**, se tiene:

$f(x)$ es cóncava hacia arriba $\forall x \in (1, 2) \cup (2, 4)$

En el punto $x = 2$ la función $f(x)$ no tiene recta tangente, ya que la función derivada no es continua.

c) **<u>Los extremos relativos</u>** de la función $f(x)$ se encuentran en los puntos donde la derivada cambia de signo. Así se tiene:

$x = 0$, $f'(x)$ pasa de positiva a negativa $\Rightarrow f(0)$ es un máximo relativo

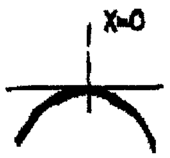
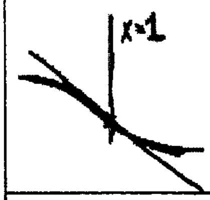
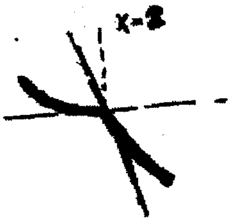
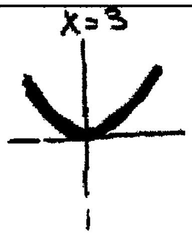
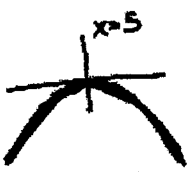
$x = 3$, $f'(x)$ pasa de negativa a positiva $\Rightarrow f(3)$ es un mínimo relativo

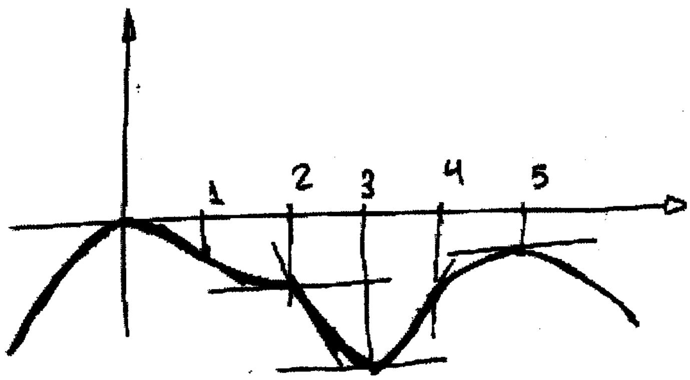
$x = 5$, $f'(x)$ pasa de positiva a negativa $\Rightarrow f(5)$ es un máximo relativo

<u>Los puntos de inflexión</u> se encuentran en aquellos puntos donde la gráfica de la función $f(x)$ tenga recta tangente y presente un cambio de concavidad. Por lo tanto los puntos de inflexión se presentan en los puntos donde $f'(x)$ tiene un extremo relativo: $x = 1$ y $x = 4$.

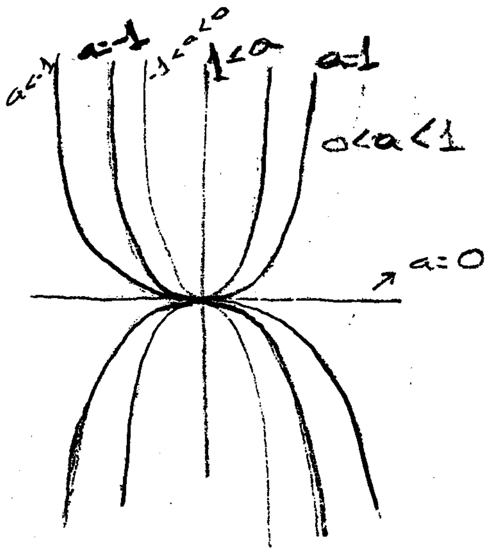
$x = 1$	$f'(1)$ es un mínimo relativo, $f'(x)$ pasa de decreciente a creciente	$\Rightarrow$	$f(x)$ pasa de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba
$x = 4$	$f'(4)$ es un máximo relativo, $f'(x)$ pasa de creciente a decreciente	$\Rightarrow$	$f(x)$ pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo

d) Utilizando lo anterior una posible gráfica de $f(x)$ continua y $f(0)=0$ es:

	Máximo relativo en $x=0$
	Punto de inflexión con pendiente $f'(1)=-1$, en $x=1$
	**Pico** en $x=2$, pendiente por la izquierda $f'(2^-)=0$ y por la derecha $f'(2^+)=-3$
	Mínimo relativo en $x=3$
	Punto de inflexión en $x=4$ con pendiente $f'(4)=1$
	Máximo relativo en $x=5$



PROBLEMA 4



→ FAMILIA $y = a x^3$

$$y' = 3 a x^2$$

$$y' = 3 \frac{y}{x^3} x^2 \Rightarrow y' = \frac{3y}{x}$$

EC. DIF. DEL HAZ $y = a x^3$

EC. DIF. DE SUS TRAYECTORIAS ORTOGONALES:

$$y' = -\frac{x}{3y}$$

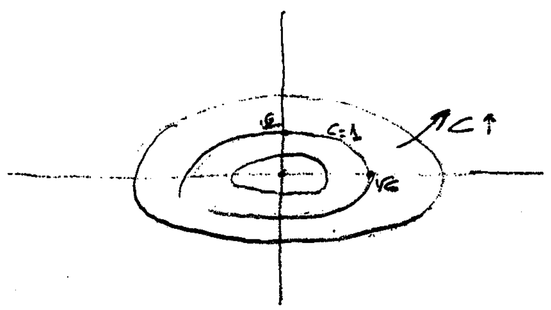
EC. DIF. DE VARIABLES SEPARABLES $\Rightarrow$ $y\,dy = -\frac{x}{3}\,dx$

$$\int y\,dy = \int -\frac{x}{3}\,dx + C$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{6} = C \quad \text{con } C \geq 0$$

$$\frac{x^2}{6C} + \frac{y^2}{2C} = 1 \quad C \neq 0$$

QUE SON ELIPSES CENTRADAS EN EL ORIGEN Y SEMIEJES $\sqrt{6C}$ Y $\sqrt{2C}$ SITUADOS EN LOS EJES COORDENADOS



PARA C GRANDES LAS ELIPSES SON CADA VEZ MÁS GRANDES. PARA C=0 LA SOLUCIÓN ES EL PUNTO (0,0).

Problema 5

Si f es derivable en x=a entonces $f(x)$ en continua en x=a

Demostración.

- La derivada de una función $f(x)$ en $x = a$ se define como $\lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]}{x-a} = f'(a)$ si el límite existe., en tal caso se dice que f es derivable en $x = a$.
- Una función $f(x)$ es continua en $x = a$ si:
  1) $f(x)$ está definida en $x = a$
  2) existe el límite $\lim_{x\to a} f(x)$
  3) coinciden: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Por tanto tenemos que demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] = 0$
Para ello multiplicamos y dividimos por $x - a$ ya que en la definición de limite se impone $0 < |x - a| < \delta$ y por tanto no es cero.

$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]}{x-a}(x-a)$ Ahora si existen los límites el límite de un producto es el producto de los límites. Como la función es derivable, existir $\lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]}{x-a} = f'(a)$ y por tanto $\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a) = f'(a).0 = 0$. Luego f es continua en x=a.