ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

10 de junio de 2005

Tiempo: 2 hora 15 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la Escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 17 de junio de 2005.
Fecha revisión: 20 junio de 2005.

PROBLEMA 1.

Expresar en forma módulo-argumental las soluciones de la ecuación: $-1+i = z^3$ y representarlas en el plano complejo.

PROBLEMA 2.

Sea la función $y = \dfrac{x^3}{|x^2-1|}$

a) Calcular las asíntotas, los puntos críticos, y los extremos absolutos y relativos si los hubiera de la función anterior.

b) Plantear la integral que calcula el área bajo la función anterior para $x \in [0, \sqrt{3}]$ ¿Es impropia?. Estudiar su convergencia.

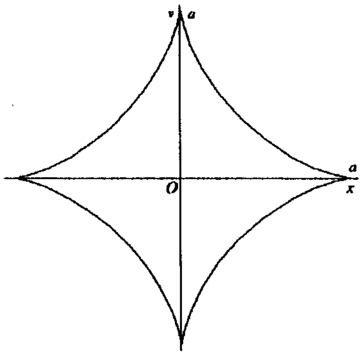
PROBLEMA 3.

Dada la función $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt \quad x \in [1, +\infty)$.

Estudiar si admite función inversa. En caso afirmativo estudiar si la función inversa es derivable y calcular $(F^{-1})'(0)$.

PROBLEMA 4.

Sea $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ con $a = 2\sqrt{2}$ la ecuación del astroide:



a) Calcular la pendiente de la recta tangente al astroide en el punto (1,1)

b) Comprobar que $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\mathrm{sen}^3\, t \end{cases}$ con $t \in [0, 2\pi]$ son unas ecuaciones paramétricas del astroide. Partiendo de estas ecuaciones, calcular la pendiente de la recta tangente en el punto (1,1).

c) Calcular la longitud del arco del astroide situado en el primer cuadrante utilizando las ecuaciones paramétricas con $t \in [0, \pi/2]$.

PROBLEMA 5.

Hallar la curva $y = y(x)$ que pasa por el punto (1,0) y tal que el rectángulo que tiene como altura la ordenada en el origen de la tangente a la curva en cada punto y como base la abscisa de dicho punto, verifica que su perímetro y su área tiene el mismo valor numérico.

PROBLEMA 6.

Sea f inyectiva y derivable, entonces $(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ siempre que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$

Problema 1: 1 pto. Problema 2: 2,5 ptos. Problema 3: 1,5 ptos. Problema 4: 2 ptos.

Problema 5: 1,5 ptos. Problema 6: 1,5 ptos.

PROBLEMA 1

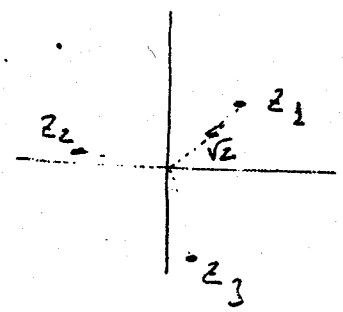
$z = \sqrt[3]{-1+i} \qquad -1+i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$

$$z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi/4}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi/4}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$

$k=0 \qquad z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{2}_{\pi/4}$

$k=1 \qquad z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{12}\right) \Rightarrow z_2 = \sqrt[6]{2}_{\frac{11\pi}{12}}$

$k=2 \qquad z_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{19\pi}{12}\right) \Rightarrow z_3 = \sqrt[6]{2}_{\frac{19\pi}{12}}$



Problema 2

$$y = \frac{x^3}{|x^2-1|} \quad ; \quad y = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-1} & |x| > 1 \\[2mm] \dfrac{x^3}{1-x^2} & -1 < x < 1 . \end{cases}$$

Nota.

$f(x) = -f(-x) \Rightarrow$ función impar (simétrica resp. $(0,0)$) y por tanto podría estudiarse solamente en $[0,\infty)$

a) - Asíntotas:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \infty \quad \Bigg\| \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty \quad \Bigg\| \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty$$

presenta asíntotas verticales en $\boxed{x = 1}$ y $\boxed{x = -1}$.

- oblicuas. $y = mx+n$. ; $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x(x^2-1)} = 1$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = 0$$

asíntota oblicua $\boxed{y = x}$

ptos críticos:

$$y' = \begin{cases} \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} \ (1) ; & |x| > 1 \\[2mm] \dfrac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2} \ (2) & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}}$$

$(1) \rightarrow \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin |x| > 1 \ (\text{no vale}) \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

$(2) \rightarrow \dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \notin (-1, 1) \ (\text{no válido}) \end{cases}$

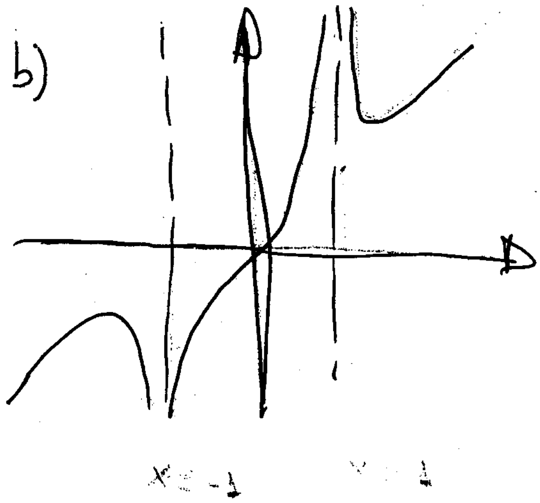
$\left. \begin{array}{l} f'(\sqrt{3}^-) < 0 \\ f'(\sqrt{3}^+) > 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = \sqrt{3}$, mínimo relativo $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$

$\left. \begin{array}{l} f'(-\sqrt{3}^-) > 0 \\ f'(-\sqrt{3}^+) < 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = -\sqrt{3}$, máximo relativo $(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3}))$

la función no presenta extremos absolutos ya que $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$

* $f'(x) > 0$, $x \in (-1, 1)$ $\rightarrow$ en $x = 0$ no presenta extremo.

b)



$$A = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{|x^2-1|} dx$$ es una integral impropia ya que la función no está acotada en $x \in [0, \sqrt{3}]$

$$A = \lim_{a \to 1^-} \int_0^a \frac{x^3}{(1-x^2)} dx + \lim_{b \to 1^+} \int_b^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{x^2-1} dx.$$

$$= \lim_{a \to 1^-} \int_0^a \left(-x + \frac{x}{1-x^2}\right) dx + \lim_{b \to 1^+} \int_b^{\sqrt{3}} \left(x + \frac{x}{x^2-1}\right) dx$$

$$= \lim_{a \to 1^-} \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{-2} Ln(1-x^2)\right]_0^a + \lim_{b \to 1^+} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} Ln(x^2-1)\right]_b^{\sqrt{3}}$$

$$= \lim_{a \to 1^-} \left(-\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} Ln(1-a^2)\right) + \lim_{b \to 1^+} \left[-\frac{b^2}{2} - \frac{1}{2} Ln(b^2-1)\right] + \frac{1}{2}(3 + Ln2)$$

$$= -\frac{1}{2} + \infty - \frac{1}{2} + \infty + \frac{1}{2}(3 + Ln2) \rightarrow \infty$$

La integral es <u>divergente</u>

PROBLEMA 3

- DERIVANDO LA FUNCIÓN $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{\sqrt{t}}\, dt$ POR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO $\left(\frac{e^t}{\sqrt{t}} \text{ ES CONTINUA PARA } x \in [1, +\infty) \right)$

  $$F'(x) = 2x \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2}} = 2e^{x^2} > 0 \quad \forall x \Rightarrow F(x) \text{ ES CRECIENTE}$$

  LUEGO ES INYECTIVA $\Rightarrow$ EXISTE $F^{-1}(x)$.

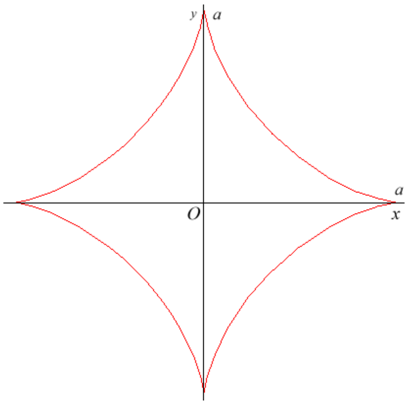
- COMO $F(x)$ ES DERIVABLE Y $F'(x) = 2e^{x^2} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ SE PUEDE ASEGURAR QUE $F^{-1}(x)$ ES DERIVABLE PARA TODO PUNTO DE SU DOMINIO

- $$(F^{-1})'(0) = \frac{1}{F'(\underbrace{F^{-1}(0)}_{1})} = \frac{1}{F'(1)} = \frac{1}{2e^{1^2}} = \frac{1}{2e}$$

  $$F^{-1}(0) = 1 \Leftrightarrow F(1) = 0 \qquad 1 \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}} 0$$

Problema 4 (2 puntos)

a) Según el enunciado se tiene la curva:



$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}\xrightarrow{a=2\sqrt{2}=2^{3/2}}x^{2/3}+y^{2/3}=2$$

La pendiente de la recta tangente es $m=\dfrac{dy}{dx}$ y se obtiene derivando implícitamente respecto de x en la ecuación de la curva:

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx}=0\,,\; x\neq 0, y\neq 0 \;\Rightarrow\; m=-\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}, x\neq 0, y\neq 0$$

En el punto $(1,1)$ se tiene $\boxed{m=-1}$

b) Sustituyendo la parametrización $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\operatorname{sen}^3 t\end{cases}$ en la ecuación de la curva se comprueba:

$$\boxed{\left(a\cos^3 t\right)^{2/3}+\left(a\operatorname{sen}^3 t\right)^{2/3}=a^{2/3}\left[\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t\right]=a^{2/3}},$$

cumple la ecuación de la curva. Además al variar el parámetro $t\in[0,2\pi]$ se recorre toda la curva una única vez, salvo $t=0$ y $t=2\pi$ que representan el mismo punto $(a,0)$.

La pendiente de la recta tangente en ecuaciones paramétricas es $m=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$, con lo que aplicando se tiene $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\operatorname{sen}^3 t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\operatorname{sen} t \\ \dfrac{dy}{dt}=3a\operatorname{sen}^2 t\cos t\end{cases}$:

$$m=-\frac{3a\operatorname{sen}^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\operatorname{sen} t}, t\neq 0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi \Rightarrow m=-\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}, t\neq 0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$$

De las ecuaciones paramétricas se tienen los valores de sen t y cos t en el punto:

$$\boxed{\begin{cases} x=1=a\cos^3 t \\ y=1=a\operatorname{sen}^3 t\end{cases} \Rightarrow m=-\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}=-\frac{\left(1/a\right)^{1/3}}{\left(1/a\right)^{1/3}}=-1}$$

c) La longitud de un arco de curva expresado en coordenadas paramétricas viene dado por $L=\displaystyle\int_{t_0}^{t_f}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$, con lo que sustituyendo se tiene:

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(3a\cos^2 t\left(-\operatorname{sen} t\right)\right)^2+\left(3a\operatorname{sen}^2 t\left(\cos t\right)\right)^2}\,dt=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\operatorname{sen}^2 t\cos^4 t+\operatorname{sen}^4 t\cos^2 t}\,dt\text{ , simplificando:}$$

$$L=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\left(\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t\right)}\,dt=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen} t\cos t\,dt=\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen} 2t\,dt\,.$$

Finalmente:

$$\boxed{L=-\frac{3a}{4}\left[\cos 2t\right]_{t=0}^{t=\pi/2}=\frac{3a}{2}=3\sqrt{2}}$$

Problema 5

Hallar la curva $y = y(x)$ que pasa por el punto $(10,0)$ y tal que el rectángulo que tiene por altura la ordenada en el origen de la tangente a la curva en cada punto y como la base la abscisa de dicho punto, verifica que su perímetro y su área tiene el mismo valor numérico.

Solución

La tangente a la curva $y = y(x)$ en el punto (x, y) es: $Y - y = y'(x)(X - x)$. El corte de la tangente con el eje OY es $\begin{cases} Y - y = y'(x)(X - x) \\ X = 0 \end{cases} \Rightarrow Y - y = y'(x)(-x) \Rightarrow Y = y - xy'(x)$

Por tanto la altura del rectángulo será: $h = |Y| = |y - xy'(x)|$

La curva debe verificar: $area = perimetro \Leftrightarrow h.x = 2h + 2x$ suponiendo x>0.

Luego $h = \dfrac{2x}{(x-2)} = |y - xy'(x)|$ Si suponemos que x>2:

La ecuación diferencial es: $\dfrac{2x}{(x-2)} = y - xy'(x)$

Ecuación diferencial lineal de primer orden.

$$\frac{2x}{(x-2)} = y - xy'(x) \Leftrightarrow y'(x) - \frac{1}{x}y + \frac{2x}{(x-2)x} = 0$$

Solución de la **ecuación homogénea**: $y'(x) - \dfrac{1}{x}y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{y'(x)}{y} = \dfrac{1}{x}$ E.D.. de variables separables $\int \dfrac{y'(x)}{y}dx = \int \dfrac{1}{x}dx \Leftrightarrow Lny = Lnx + C = Lnkx \Leftrightarrow y = Kx$

Solución de **la ecuación completa** $y'(x) - \dfrac{1}{x}y + \dfrac{2x}{(x-2)x} = 0$ con método de variación de las constante: suponemos que la solución es de la forma: $y = K(x)x$ y sustituimos: $y' = K'(x)x + K(x)$ en la ecuación:

$$K'(x)x + K - \frac{1}{x}Kx + \frac{2}{(x-2)} = 0 \Rightarrow K'(x)x + \frac{2}{(x-2)} = 0 \Rightarrow K'(x) = -\frac{2}{(x-2)x} \Rightarrow$$

$$\int K'(x)dx = \int \frac{-2}{(x-2)x}dx \Rightarrow K(x) = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-2)}\right)dx = Ln(x) + Ln(x-2) + C$$

Luego la solución de la ecuación completa es:

$$y = \left(Ln(x) + Ln(x-2) + C\right)x = Cx + xLn\left(x(x-2)\right)$$

Si debe pasar por el punto $(10,0)$: $0 = (Ln(80 + C)10 \Rightarrow C = -Ln(80)$

La solución de $\begin{cases} \dfrac{2x}{(x-2)} = y - xy'(x) \\ y(10) = 0 \end{cases}$ es $y = x\left(Ln\left(x(x-2)\right) - Ln80\right) = xLn\left(\dfrac{x(x-2)}{80}\right)$

Problema 6 (1,5 puntos)

Sea *f* inyectiva y derivable, entonces $\left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ siempre que $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$.

<u>Demostración</u>

Podemos demostrar el teorema por derivación implícita como sigue.
Sea $y = f^{-1}(x)$, que existe por ser *f* inyectiva entonces

$$f(y) = x.$$

Derivando los dos miembros de la ecuación con respecto a *x*, obtenemos

$$\frac{d}{dx} f(y) = \frac{d}{dx} x,$$

y por tanto,

$$f'(y)\frac{dy}{dx} = 1$$

por la regla de la cadena. En este último paso se da por supuesto que $\dfrac{dy}{dx}$ existe. Así, siempre que $f'(y) \neq 0$ se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)},$$

o sea,

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)},$$

como queríamos demostrar.