ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

24 de junio de 2006

Tiempo: 2 horas 30 minutos

Los problemas deben entregarse separados.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: martes 4 de julio de 2006

Fecha prevista de revisión de exámenes: miércoles 5 de julio de 2006

Si se desea revisión de examen, ésta deberá solicitarse señalándolo en la lista dispuesta en el despacho 405.

PROBLEMA 1.

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, expresar z_1 en forma módulo-argumental y z_2 en forma binómica:

a) $z_1 = \dfrac{32\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)}{\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\right)^4}$ b) $z_2 = 13\dfrac{i^{111}\left(1-i^{15}\right)}{(3+2i)i^{37}}$

(1 punto)

PROBLEMA 2.

Sea la función $f(x) = (1-|x|)e^x$. Se pide:

a) Estudiar la derivabilidad de la función en $x = 0$.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y concavidad de la función $f(x)$, los extremos y puntos de inflexión (si los hubiera), así como las asíntotas y puntos de corte con los ejes coordenados. Dibujar la gráfica de $f(x)$.

c) ¿Alcanza la función extremos absolutos en el intervalo $\left[-\dfrac{3}{2}, 1\right]$? Justifica la respuesta. Calcularlos en caso afirmativo.

(3 puntos)

PROBLEMA 3.

Dadas las curvas expresadas en coordenadas polares $\rho_1(\theta) = 1 + \cos\theta$ y $\rho_2(\theta) = 2 + 2\cos\theta$, se pide:

a) Calcular el área encerrada entre ambas curvas.

b) Calcular los puntos donde la recta tangente a la curva $\rho_1(\theta)$ es vertical.

(2 puntos)

PROBLEMA 4.

Estudiar si la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}\,dx$ es impropia y en caso afirmativo determinar si converge o no.

(1 punto)

PROBLEMA 5.

Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas cuya ecuación es $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = K, K \in \mathbb{R}$. Dibujar ambas familias de curvas según los valores de sus parámetros respectivos.

(1,5 puntos)

PROBLEMA 6.

Demostrar el teorema del valor medio para integrales:

"Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$"

(1,5 puntos)

PROBLEMA 1.

a) $$z_1 = \frac{32\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\right)^4} = \frac{32 e^{i\pi/6}}{\left(2e^{-i\pi/4}\right)^4} = \frac{32 e^{i\pi/6}}{2^4 e^{-i\pi}} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

b) $$z_2 = 13\,\frac{i^{111}\left(1 - i^{15}\right)}{(3+2i)\,i^{37}} = 13\,\frac{(-i)(1+i)}{(+i)(3+2i)} = -13\,\frac{(1+i)(3-2i)}{13} = -5-i$$

$$i^{111} = i^{27\cdot 4+3} = i^3 = -i$$
$$i^{15} = i^{3\cdot 4+3} = i^3 = -i$$
$$i^{37} = i^{9\cdot 4+1} = i$$

nº 2

a) $f(x) = (1-|x|)e^x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} (1-x)e^x & x \geq 0 \\ (1+x)e^x & x < 0 \end{cases}$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1-h)e^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \left(-e^h + \frac{e^h-1}{h}\right)$$

$$= -\lim_{h\to 0} e^h + \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)e^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \left(e^h + \frac{e^h-1}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} e^h + \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 2$$

como las derivadas laterales no coinciden la función no es derivable en $x=0$.

b) $x=0$ es un punto crítico, ya que la función $\exists$ pero $\nexists f'$

cálculo de otros puntos críticos:

$$f'(x) = \begin{cases} -xe^x & x > 0 \longrightarrow \underline{\text{no hay puntos}} \text{ críticos.} \\ (2+x)e^x & x < 0 \longrightarrow (2+x)e^x = 0 \Rightarrow \boxed{x=-2}. \end{cases}$$

$x \in (-\infty, -2)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x \in (-2, 0)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$x \in (0, \infty)$ $f'(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ decreciente

* concavidad:

$$f''(x) = \begin{cases} -e^x(1+x) & x > 0 \longrightarrow \text{no se anula nunca.} \\ e^x(3+x) & x < 0 \longrightarrow e^x(3+x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=-3} \end{cases}$$

$x \in (-\infty, -3) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa

$x \in (-3, 0) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava

$x \in (0, \infty) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa.

* Extremos:

ptos críticos: $x = 0$, $x = -2$

$$x = -2 \to \begin{cases} f'(-2^-) < 0 \\ f'(-2^+) > 0 \end{cases} \quad \underline{x=-2 \text{ mínimo relativo.}}$$

$(-2,$

$$x = 0 \to \begin{cases} f'(0^-) > 0 \\ f'(0^+) < 0 \end{cases} \quad \underline{x = 0 \text{ máximo relativo}}$$

$(0, 1)$

* Ptos de inflexion

$$x = -3 \quad \begin{cases} f''(-3^-) < 0 \\ f''(-3^+) > 0 \\ \exists f'(-3) \end{cases} \Rightarrow \underline{x = -3 \text{ pto de inflexion}}$$

$(-3$

$x=0$ no es pto de inflexion ya que $\nexists f'(0)$

Asintotas horizontales:

* $\lim_{x\to\infty} (1+x)e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{e^{-x}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{e^{-x}} = 0$

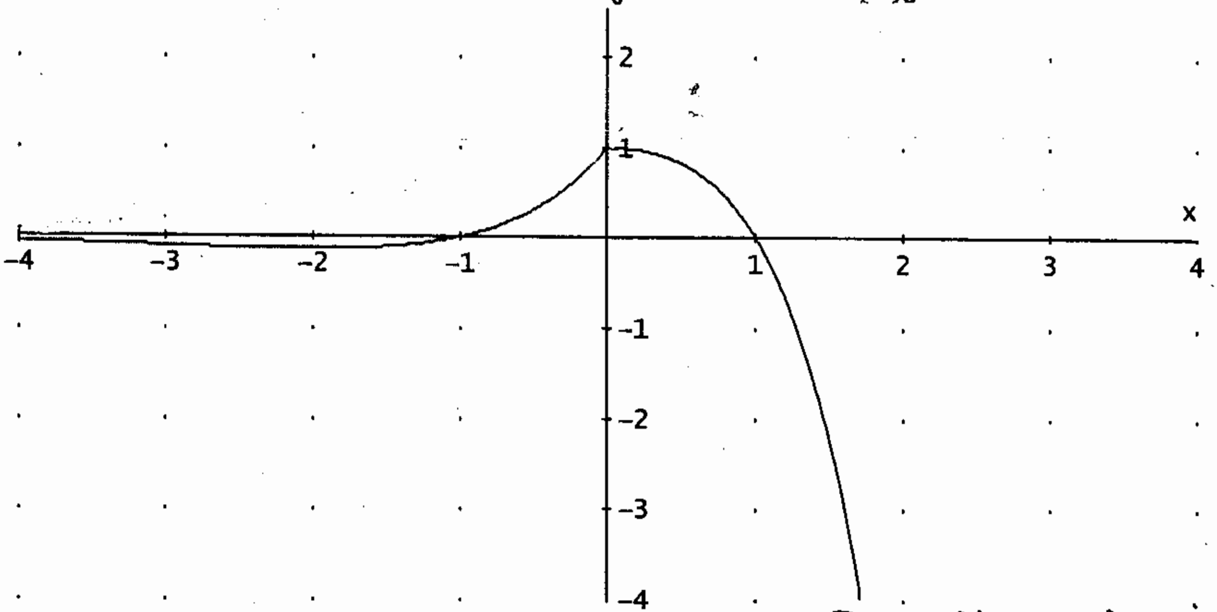
* $\lim_{x\to\infty} (1-x)e^x \to -\infty$

Puntos de corte:

Con OX ; $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1+x)e^x = 0 \iff x = -1 \to (-1, 0) = P_0 \\ (1-x)e^x = 0 \iff x = 1 \to (1, 0) = P_1 \end{cases}$

Con OY ; $x = 0 \to y = 1 \to (0, 1) = P_2$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, ya que: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$



c) La función es continua en $\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$ y el intervalo $\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$ es cerrado y acotado. Por el teorema del valor extremo (Fermat), la función tiene extremos absolutos

En $x=0$ ~~presenta~~ su máximo absoluto $f(0)=1$. ya que f en $\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$ no posee ningún otro extremo relativo y

~~En~~ $f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0$

$f(1) = 0$

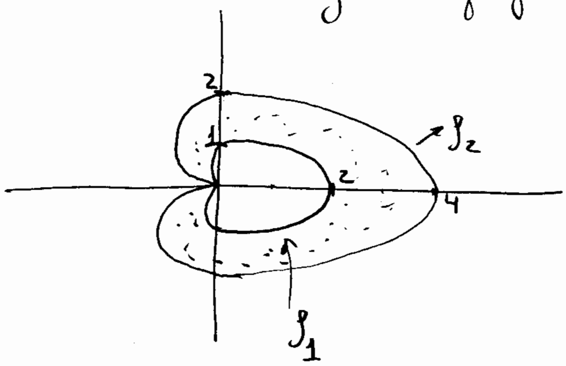
Por tanto, $f\left(-\frac{3}{2}\right))$ es un <u>mínimo absoluto</u>

PROBLEMA 3

(a) $\rho_1 = 1 + \cos\theta$

$\rho_2 = 2 + 2\cos\theta$

Son dos cardioides de forma general $\rho = a + b\cos\theta$ con $a = b$ cuyas gráficas aproximadas son:



ptos. de corte:

$1 + \cos\theta = 2 + 2\cos\theta$

$-1 = \cos\theta$

$\theta = \pi \Rightarrow$ ORIGEN

Al ser ambas curvas simétricas respecto del eje polar $\rho_1(\theta) = \rho_1(-\theta)$ y $\rho_2(\theta) = \rho_2(-\theta)$, el área punteada vendrá dada por:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi (\rho_2^2 - \rho_1^2)\, d\theta = \int_0^\pi \left((2 + 2\cos\theta)^2 - (1 + \cos\theta)^2\right) d\theta$$

$$= \int_0^\pi (3\cos^2\theta + 3 + 6\cos\theta)\, d\theta =$$

$$= 3\int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta + 3\theta\Big]_0^\pi + 6\,\text{sen}\,\theta\Big]_0^\pi = \frac{9\pi}{2}\, u^2$$

(b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\overbrace{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta}^{= \frac{dy}{d\theta}}}{\underbrace{-f(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f'(\theta)\cos\theta}_{= \frac{dx}{d\theta}}} = \frac{(1 + \cos\theta)\cos\theta + (-\text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\theta}{-(1 + \cos\theta)\,\text{sen}\,\theta + (-\text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\theta} =$$

$$= \frac{\cos\theta + \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}{\text{sen}\,\theta(-1 - 2\cos\theta)}$$

Para que la recta tangente sea vertical se debe anular el denominador de $\frac{dy}{dx}$ $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)$

$$\operatorname{sen}\theta(-1-2\cos\theta) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi$$

$$-\frac{1}{2} = \cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

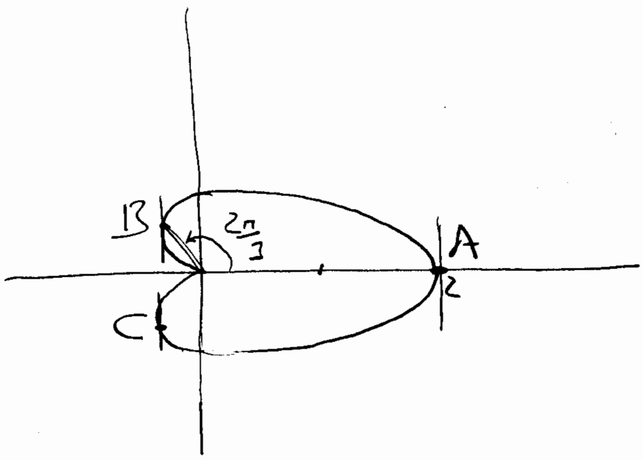
y además para estos valores no se puede anular el numerador de $\frac{dy}{dx}$ $\left(\frac{dy}{d\theta}\right)$

$\frac{dy}{d\theta}$ se anula solo para el valor $\theta = \pi$

luego los ptos de recta tangente vertical serán aquellos de $\theta = 0$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $\theta = \frac{4\pi}{3}$

es decir, los ptos. en polares $A(\overset{=\rho}{2}, \overset{=\theta}{0})$, $B(\overset{=\rho}{\frac{1}{2}}, \overset{=\theta}{\frac{2\pi}{3}})$

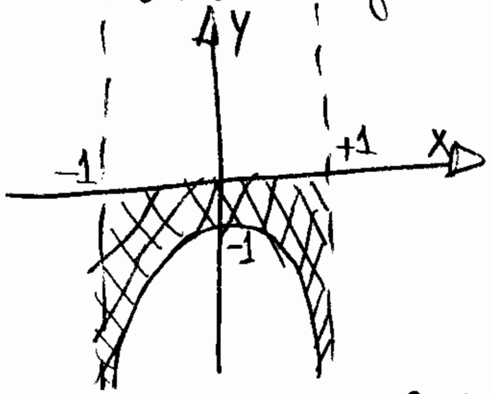
$C(\underset{\rho}{\frac{1}{2}}, \underset{\theta}{\frac{4\pi}{3}})$



PROBLEMA 4.

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}dx$ es impropia ya que $\lim_{x\to -1} \frac{1}{x^2-1} = \lim_{x\to +1} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$

Función integrando no acotada. Dado que la función integrando es par $f(-x)=f(x)$ y el intervalo de integración es simétrico respecto del origen, se estudia por simetría sólo la mitad.



$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2-1}dx = 2\int_{0}^{+1} \frac{1}{x^2-1}dx$$

Primitiva $\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{-1/2}{x+1}dx + \int \frac{1/2}{x-1}dx = \frac{1}{2} Ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

Integral impropia $\int_{0}^{+1} \frac{1}{x^2-1}dx = \lim_{b\to 1^-} \int_{0}^{b} \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to 1^-}\left[Ln\left|\frac{b-1}{b+1}\right| - Ln\left|\frac{-1}{1}\right|\right] =$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to 1^-} Ln\left[\frac{1-b}{1+b}\right] = -\infty$$

No converge

Solución Problema 5.

Trayectorias ortogonales a $x^2 + \frac{y^2}{2} = k$

Obtenemos la ecuación diferencial de la familia de curvas: $x^2 + \frac{y^2}{2} = k$

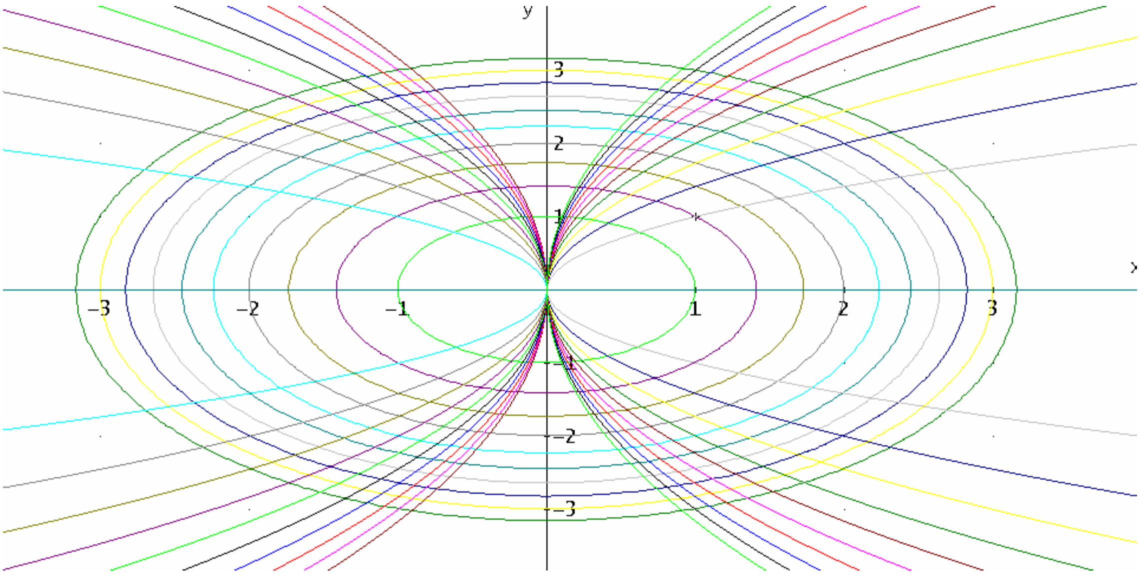
$2x + yy' = 0$ suponiendo que $y = y(x)$.

Las trayectorias ortogonales tienen como pendiente: $\frac{-1}{y'}$ en cada uno de los puntos, luego la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales es:

$2x + y\frac{(-1)}{y'} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2x}$ Ecuación en Variables Separables.

$$\int \frac{y'}{y}dx = \int \frac{1}{2x}dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{2x}dx \Leftrightarrow Ln|y| = \frac{1}{2}Ln|x| + c_1$$

Luego: $Ln|y| = Ln\left(c_2\sqrt{|x|}\right) \Rightarrow |y| = c_2\sqrt{|x|} \Rightarrow y^2 = Cx$



Problema 6.

Teorema de la media (Teorema del valor medio para integrales)

Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe un $c \in (a,b)$ en donde

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$$

Demostración:

Si f es constante, es evidente: $\int_a^b Kdt = K(b-a) = f(c)(b-a)$ (incluye el caso b=a)

Si f es continua en el intervalo cerrado por el **Teorema del valor extremo** f alcanza su máximo M y su mínimo m en el intervalo:

existen $x_1, x_2 \in [a,b]$ tal que $m = f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = M$,

luego $\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Obtenemos un valor intermedio entre el mínimo m y el máximo M:

$m = f(x_1) \le \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} \le M = f(x_2)$. Como f es continua en $[a,b]$, por el **Teorema del valor intermedio**, debe existir un valor de f que sea: $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} = f(c)$ para algún $c \in [a,b]$.