ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

# EXAMEN DE CÁLCULO I

1 de febrero de 2007

***Tiempo: 2 horas y 15 minutos***

**Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.**

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: **viernes 16 de febrero de 2007**

Fecha prevista de revisión de exámenes: **viernes 23 de febrero de 2007**

## PROBLEMA 1.

Sea la ecuación $z^3+1=0, z\in\mathbb{C}$. Representar las soluciones de la ecuación, expresándolas en forma binómica y en forma exponencial. Calcular el perímetro y el área del polígono cuyos vértices son las soluciones de la ecuación.

**(1 punto)**

## PROBLEMA 2.

Dada la función $f(x)=\dfrac{\ln(\ln x)}{x}$, se pide:

a) Determinar el dominio de la función y el intervalo donde $f(x)>0$. Determinar las asíntotas de $f(x)$, si las hubiera.

b) Obtener la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=e$. Aplicar el teorema de la función inversa para calcular $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

c) Calcular el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 2 en un entorno de $x=e$. Utilizar el polinomio para dar una aproximación de $f\left(\dfrac{3}{2}e\right)$.

**(3,5 puntos)**

## PROBLEMA 3.

Sea la región $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\geq(y-1)^2 \wedge (x-4)\leq-2(y-1)^2 \wedge 0\leq y\leq 2\right\}$. Se pide:

a) Representar la región $R$ y calcular su área.

b) Calcular por el método de tubos el volumen de revolución obtenido al girar $R$ alrededor del eje $OX$.

c) Plantear las integrales que calcularían por el método de discos el volumen de revolución obtenido al girar $R$ alrededor del eje $OY$.

**(3,0 puntos)**

## PROBLEMA 4.

Resolver la ecuación diferencial siguiente, identificando y representando la solución obtenida:

$$\begin{cases} xy'+(1-2x)y=1 \\ y(1)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

**(1,5 puntos)**

## PROBLEMA 5.

Enunciar el Teorema de Rolle.

Utilizando este teorema demostrar que si $b<1$ los polinomios $P(x)=x^3+x^2+x+1$ y $Q(x)=x^2+bx+c$ se cortan en un único punto.

*Sugerencia:* utilizar la función $h(x)=P(x)-Q(x)$.

**(1 punto)**

Problema 1

$z^3+1=0$ ; $z=\sqrt[3]{-1}$

$|z_0|=1$

$\theta_0=\text{arctg}\,\frac{0}{-1}=\pi$ ; Forma exponencial $z_k=\sqrt[3]{|z_0|}\,e^{i\left(\frac{\theta_0+2k\pi}{3}\right)}$ $k=0,1,2.$

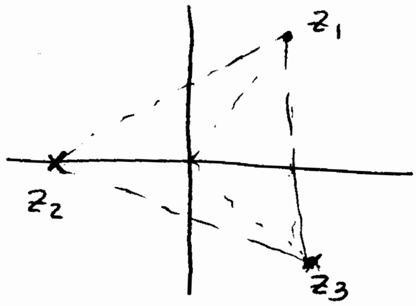
soluciones: $z_1=1\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$ , $z_2=1\,e^{i\left(\frac{\pi+2\pi}{3}\right)}$ ; $z_3=1\,e^{i\left(\frac{\pi+4\pi}{3}\right)}$

$z_1=e^{\pi/3\,i}$ , $z_2=e^{\pi}$ ; $z_3=e^{-\pi/3\,i}$

en forma binómica : $z_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2=\cos\pi+i\,\text{sen}\,\pi=-1.$

$z_3=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$




$\ell=|z_1-z_2|$; $d(z_1,z_3)=\sqrt{(\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$

los afijos de las raices forman un triángulo equilátero, por tanto

el perímetro $=3\sqrt{3}\ u$

El área $=\frac{3\sqrt{3}}{4}\ u^2$ ; Área $=\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

Problema 2. $f(x) = \frac{Ln(Lnx)}{x}$ Febrero 2007

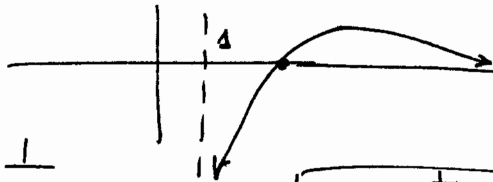
a) Dominio de $f$.

La función no está definida en $x=0$ ; $Ln(x)$ para $x>0$ y $Ln(lnx)$ para $lnx>0$. Luego $x>1$

$\boxed{Dom f = (1, \infty)}$

Intervalo donde $f(x)>0$

$Ln\,x$ es positivo si $x>1$ ; $Ln(lnx)>0$ si $Lnx>1 \iff x>e$



$\boxed{I = (e, \infty)}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Ln(Lnx)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{Lnx}\cdot\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{asíntota } y=0}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{Ln(Lnx)}{x} = -\infty \Rightarrow \boxed{\text{asíntota vertical } x=1}$$

b) Ec. recta Tg a $f(x)$ en $x=e$

$y - f(e) = f'(e)(x-e)$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{Lnx}\cdot\frac{1}{x}\cdot x - 1\,Ln(Lnx)}{x^2} = \frac{\frac{1}{Lnx} - Ln(Lnx)}{x^2}$$

$f(e) = Ln(le) = Ln1 = 0$

$$f'(e) = \frac{1-0}{e^2} = \boxed{\frac{1}{e^2}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{e^2}(x-e)}$$

En un entorno del punto $y=0=Ln(Lnx_0) \Rightarrow x_0=e$ $(0,e)$ donde $f'(e)\neq 0$ Tenemos definida la función inversa y su derivada es

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'(e)} = e^2}$$

c) $P_2(x) = f(e) + f'(e)(x-e) + \frac{f''(e)}{2!}(x-e)^2$

$$f''(x) = \frac{\left[-\frac{1/x}{Ln^2x} - \frac{1}{Lnx}\cdot\frac{1}{x}\right]\cdot x^2 - 2x\left[\frac{1}{Lnx} - Ln(Lnx)\right]}{x^4}$$

$$f''(e) = -\frac{4}{e^3} \Rightarrow \boxed{P_2(x) = \frac{1}{e^2}(x-e) - \frac{4}{e^3\cdot 2!}(x-e)^2}$$

$$\boxed{f\left(\tfrac{3}{2}e\right) \simeq \frac{1}{e^2}\left(\frac{1}{2}e\right) - \frac{2}{e^3}\left(\frac{1}{2}e\right)^2 = 0}$$

**PROBLEMA 2.**

**(3 puntos)**

***SOLUCIÓN***

a) La región $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\ge (y-1)^2 \wedge (x-4)\le -2(y-1)^2 \wedge 0\le y\le 2\right\}$, se identifica y representa a partir de las curvas frontera

- $x=(y-1)^2$, parábola de vértice $(0,1)$, con eje $y=1$, $y\to\infty \Rightarrow x\to\infty$
- $(x-4)=-2(y-1)^2$, parábola de vértice $(4,1)$, con eje $y=1$, $y\to\infty \Rightarrow x\to -\infty$
- $\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}$, rectas paralelas al eje $OX$

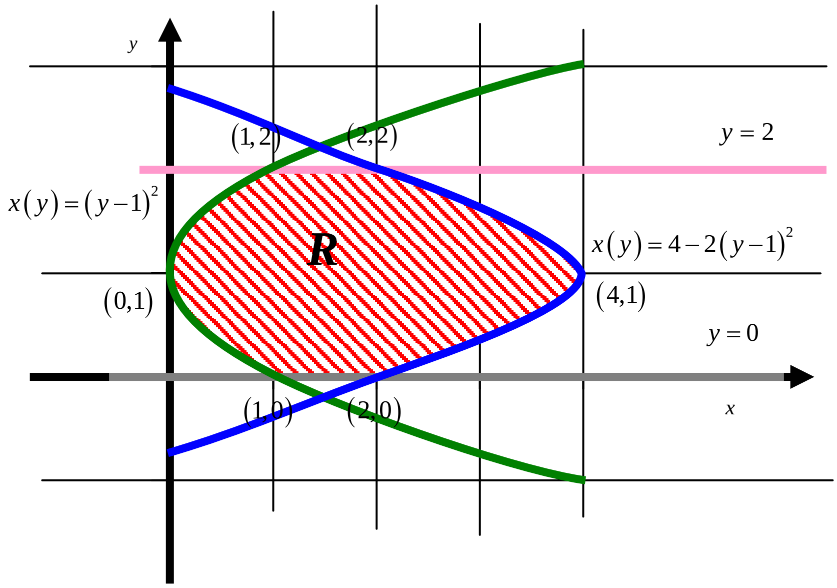
Intersecciones de las curvas frontera:

$$\begin{cases} y=0 \\ x=(y-1)^2 \end{cases} \Rightarrow (1,0),$$

$$\begin{cases} y=2 \\ x=(y-1)^2 \end{cases} \Rightarrow (1,2)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ (x-4)=-2(y-1)^2 \end{cases} \Rightarrow (2,0),$$

$$\begin{cases} y=2 \\ (x-4)=-2(y-1)^2 \end{cases} \Rightarrow (2,2)$$

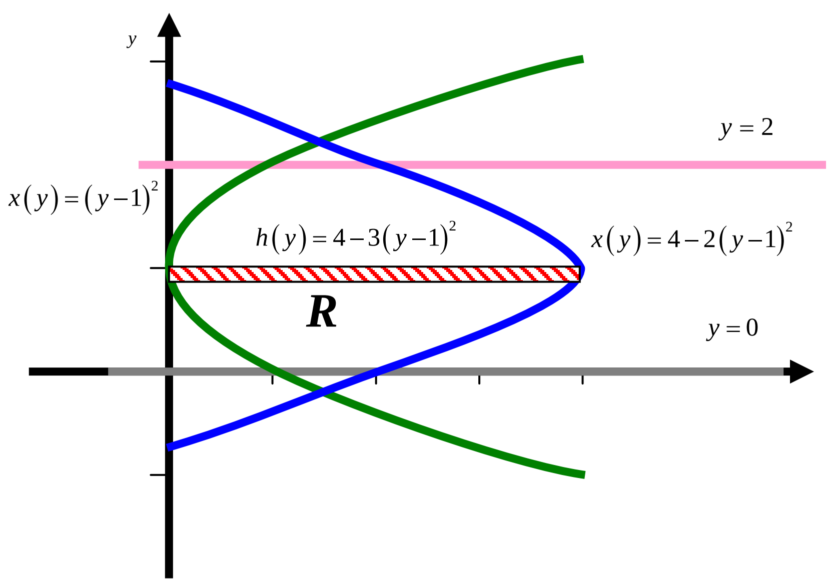



Las intersecciones de las parábolas se producen fuera de la región $R$.

$$\begin{cases} x=(y-1)^2 \\ (x-4)=-2(y-1)^2 \end{cases} \Rightarrow (y-1)^2=\frac{4}{3} \Rightarrow y^2-2y-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow y=\frac{2\pm\sqrt{4+\frac{4}{3}}}{2} \Rightarrow y=\begin{cases} 1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}>2 \\ 1-\dfrac{2}{\sqrt{3}}<0 \end{cases}$$

Área de la región:

$$A=\int_{y=0}^{y=2} h(y)\,dy=$$
$$=\int_{y=0}^{y=2}\left[\left(4-2(y-1)^2\right)-(y-1)^2\right]dy=$$
$$=\int_{y=0}^{y=2}\left(-3y^2+6y+1\right)dy=$$
$$=\left[-y^3+3y^2+y\right]_0^2=$$
$$=(-8+12+2)=6u^2$$



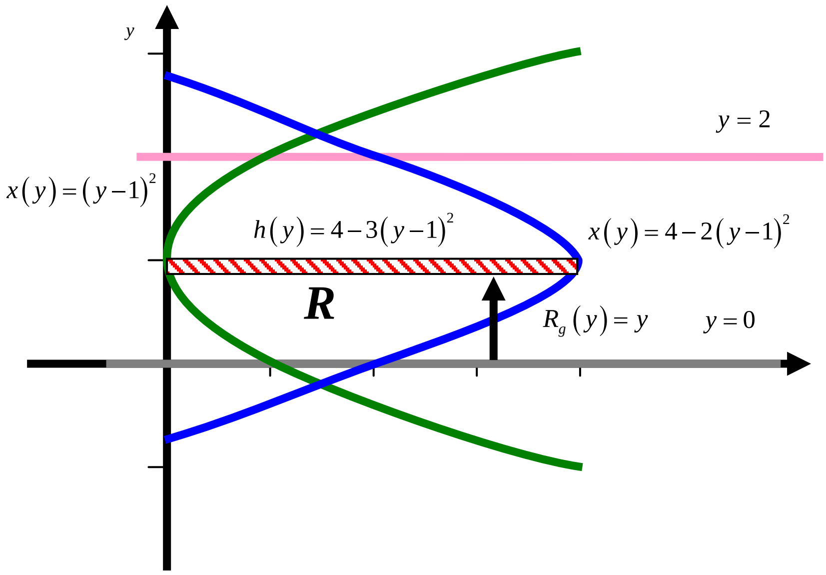
b) Volumen obtenido al girar la región alrededor del eje *OX*, aplicando el método de tubos.

$$V_{OX} = \int_{y=0}^{y=2} 2\pi R_g(y)\,h(y)\,dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} 2\pi y\left(-3y^2+6y+1\right)dy =$$

$$= 2\pi\left[-\frac{3}{4}y^4+\frac{6}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2} =$$

$$= 2\pi\left[-12+16+2\right] = 12\pi\, u^3$$




c) Volumen obtenido al girar la región alrededor del eje *OY*, aplicando el método de discos.

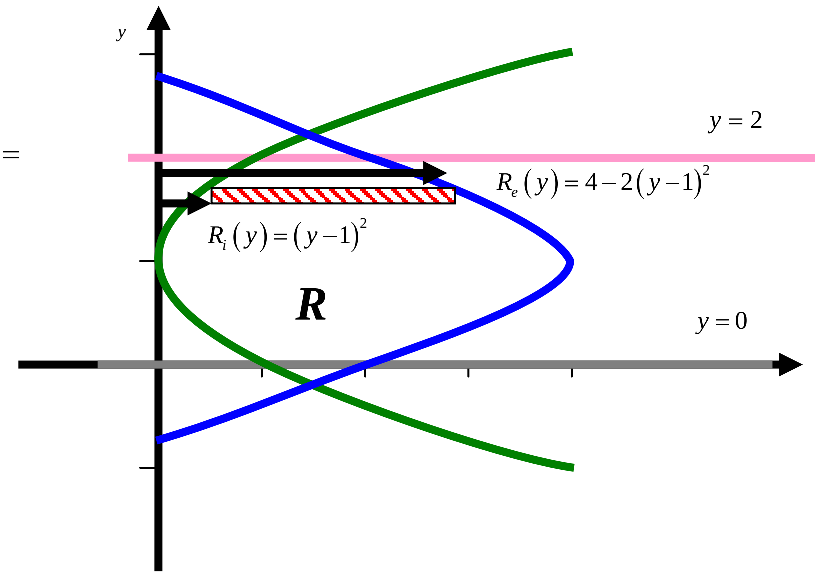
$$V_{OY} = \int_{y=0}^{y=2} \pi\left[R_e^2 - R_i^2\right]dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} \pi\left[\left(4-2(y-1)^2\right)^2 - \left((y-1)^2\right)^2\right]dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} \pi\left[16-16(y-1)^2+3(y-1)^4\right]dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} \pi\left[3y^4-12y^3+2y^2+20y+3\right]dy =$$

$$= \frac{338}{15}\pi u^3$$



Problema 4

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

$$P.C.I \begin{cases} xy' + (1-2x)y = 1 \\ y(1) = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{E.D.O lineal de orden 1} \qquad \begin{cases} y' + \frac{(1-2x)}{x} y = \frac{1}{x} \\ y(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

A) Método $y_g = y_H + y_P$

I) Cálculo de solución del problema homogéneo

- $y' + \frac{(1-2x)}{x} y = 0$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{x} y$ Por variables separadas
- $\frac{dy}{y} = \frac{2x-1}{x} dx \rightsquigarrow \int \frac{dy}{y} = \int \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx$
- $\ln|y| = 2x - \ln|x| + \ln|C| \rightsquigarrow$

$\boxed{y = C\frac{e^{2x}}{x}}$ Solución al problema homogéneo

II) Buscamos una solución particular del tipo $y_p = C(x)\frac{e^{2x}}{x}$

- Sustituimos en la E.D.O. $y_p' = c'(x)\frac{e^{2x}}{x} - C(x)\frac{e^{2x}}{x}\frac{(1-2x)}{x}$

$$c'(x)\frac{e^{2x}}{x} - \cancel{C(x)\frac{e^{2x}}{x}\frac{(1-2x)}{x}} + \cancel{C(x)\frac{e^{2x}}{x}\frac{(1-2x)}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$c'(x) = e^{-2x} \rightsquigarrow C(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$\boxed{y_p(x) = -\frac{1}{2}\frac{e^{-2x}e^{2x}}{x} = -\frac{1}{2x}}$$

III) $y_g = y_p + y_H$

$y_g(x) = C\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{2x}$

Usando $y(1) = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow Ce^2 = 0 \Rightarrow C = 0$

IV) Solución al P.C.I $\boxed{y(x) = -\frac{1}{2x}}$

B] Factor integrante

escojo $\ln|C| = 0$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1-2x}{x}dx} = e^{\ln|x| - 2x + \cancel{\ln|C|}} = \frac{x}{e^{2x}}$$

- $y' + p(x)y = q(x)$

$$\mu(x)\left[y' + p(x)y\right] = \mu(x)\,q(x)$$

$$\frac{x}{e^{2x}}\left[y' + \frac{(1-2x)}{x}y\right] = \frac{x}{e^{2x}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\underbrace{y'\frac{x}{e^{2x}} + \frac{(1-2x)}{e^{2x}}y}_{\frac{d}{dx}\left(y\cdot\frac{x}{e^{2x}}\right)} = \frac{1}{e^{2x}}$$

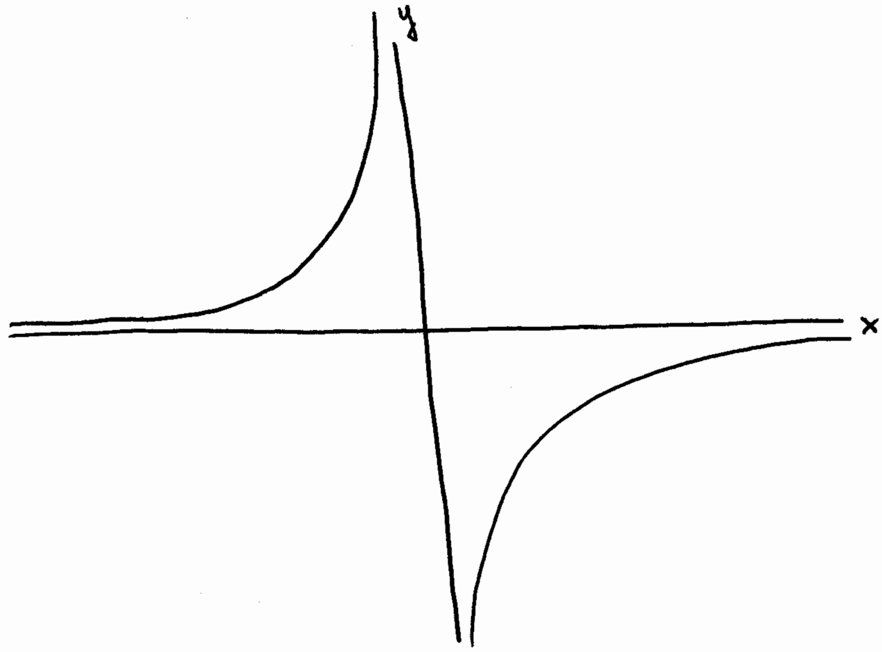
$$\frac{d}{dx}\left(y\cdot\frac{x}{e^{2x}}\right) = \frac{1}{e^{2x}} \Rightarrow y\cdot\frac{x}{e^{2x}} = \int\frac{1}{e^{2x}}dx$$

$$\Rightarrow y\cdot\frac{x}{e^{2x}} = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2x} + \frac{Ce^{2x}}{x}}$$

- Usando C.I.

$$y(1) = -\frac{1}{2} + ce^{2} = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2x}}$$



# PROBLEMA 5

**A** TEOREMA DE ROLLE:

Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$, con $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \,/\, f'(c)=0$

**B** Si $h(x)=P(x)-Q(x)$ los puntos de corte de $P(x)$ y $Q(x)$ coinciden con las raíces de $h(x)$, demostraremos que $h(x)$ sólo corta una vez al eje OX.

$h(x) = x^3 + (1-b)x + (1-c)$

Al ser $h(x)$ un polinomio de grado impar al menos corta una vez al eje OX.

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

$h(x)$ continua $\overset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow}$ corta al eje OX

Si cortara en dos puntos al eje, tendrían que existir ~~dos~~ a y b tal que $h(a)=h(b)=0$, como $h(x)$ es continua y derivable $\forall x \in \mathbb{R}$, según el teorema de Rolle debería de existir $c \in (a,b) \,/\, h'(c)=0$ pero $h'(x) = 3x^2 + (1-b)$ que para $b<1$ nunca vale cero, con lo que se llega a un absurdo al haber supuesto que $h(a)=h(b)=0$, luego no existen dos ptos por donde $h(x)$ corte al eje OX, sólo habrá uno