ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

21 de junio de 2007

Tiempo: 2 horas

Cada problema debe comenzarse en una nueva hoja de examen.

No se permite entregar el examen a lápiz.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: miércoles 4 de julio de 2007

Fecha prevista de revisión de exámenes: viernes 6 de julio de 2007

PROBLEMA 1.

Calcular $z=\dfrac{(-1+i)^{100}}{\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^{50}}$, expresando la solución en forma binómica y en forma exponencial.

(1 punto)

PROBLEMA 2.

Dada la función $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, se pide:

a) Calcular los intervalos de crecimiento y concavidad, determinar las asíntotas y trazar su gráfica.

b) Calcular el polinomio de MacLaurin de grado 2 de la función, expresando el resto en la forma de Lagrange. Aproximar el valor de $f(1)$ utilizando el polinomio anterior.

c) Dada la región $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\le e^{-\frac{x^2}{2}} \wedge x\ge 0 \wedge y\ge 0\right\}$, calcular por el método de tubos el volumen de revolución obtenido al girar D en torno al eje OY.

(3,5 puntos)

PROBLEMA 3.

Sea la curva $r(\theta)=\cos(3\theta)$ dada en coordenadas polares. Se pide:

a) Representar gráficamente la curva. Hallar la recta tangente a la curva en $\theta=0$ y en $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

b) Calcular el área de una hoja.

c) Plantear la integral que calcularía la longitud de la misma hoja.

(3 puntos)

PROBLEMA 4.

Resolver la ecuación diferencial $y''=y$ con las condiciones iniciales $\begin{cases} y(0)=2 \\ y'(0)=1 \end{cases}$. Comprobar que la solución obtenida es $y=\operatorname{senh} x+2\cosh x$.

(1,5 puntos)

PROBLEMA 5.

Demostrar el siguiente teorema:

"Sea $f(x)$ derivable en $I\subset\mathbb{R}$. Si $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]\subset I$ entonces $F'(x)=f(x), \forall x\in(a,b)$

Problema 1

$$z = \frac{(-1+i)^{100}}{(1-\sqrt{3}i)^{50}} \quad ; \quad z_1 = (-1+i) \rightarrow |z_1| = \sqrt{2} \; ; \; \theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{-1} = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_2 = (1-\sqrt{3}i) \rightarrow |z_2| = 2 \; ; \; \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}$$

$$z = \frac{(\sqrt{2})^{100}_{(3\pi/4)100}}{2^{50}_{(-\pi/3)50}} = \frac{2^{50}_{\pi}}{2^{50}_{-2\pi/3}} = 1_{-\pi/3}.$$

Forma binómica: $z = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}(-\pi/3)\right) = \boxed{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Forma exponencial: $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

PROBLEMA 2

Para resolver el problema se tiene en cuenta que la función $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ tiene derivada segunda en $\mathbb{R}$.

a)

A partir del **signo de la función derivada** se determinan los **intervalos de crecimiento de** $f(x)$:

$$f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow f(x)\begin{cases}\text{decrece } x>0\\ \text{crece } x>0\end{cases} \text{ y tiene un } \textbf{máximo relativo} \text{ en } x=0, f(0)=1$$

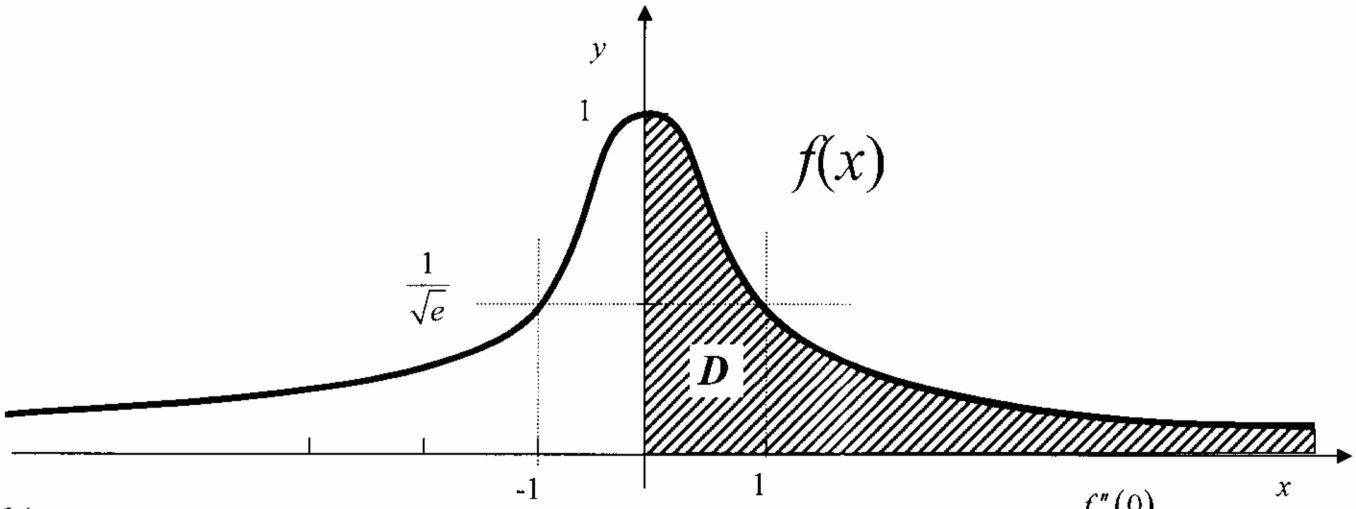
A partir del **signo de la función derivada segunda** se determinan los **intervalos de concavidad de** $f(x)$

$$f''(x)=\left(x^2-1\right)e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow f(x)\begin{cases}\text{cóncava hacia abajo}\left(x^2-1\right)<0 \Rightarrow -1<x<1\\ \text{cóncava hacia arriba}\left(x^2-1\right)>0 \Rightarrow x<-1 \cup x>1\end{cases}$$ y tiene **puntos de infexión** en $x=\pm 1, f(\pm 1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$

Dado que la función es continua en $\mathbb{R}$ no tiene asíntotas verticales. Se determina si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}=0 \Rightarrow f(x) \text{ tiene asíntotas horizontales } y=0 \text{ con } x\to\pm\infty$$

Utilizando todo lo anterior, una posible gráfica de $f(x)$ es:



b) El polinomio de MacLaurin de grado 2 tiene la forma: $P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2$ y utilizando las derivadas calculadas en el apartado a)

$$P_2(x)=1-\frac{1}{2}x^2$$

El resto de Lagrange es $R_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{6}x^3, \xi\in(0,x)$, siendo $f'''(\xi)=\left(3\xi-\xi^3\right)e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

El valor aproximado mediante el polinomio es $f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}\cong 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

c) Se pide el volumen generado al girar el área bajo curva en el primer cuadrante.

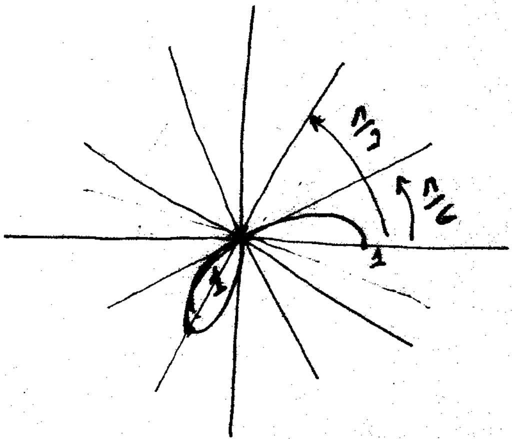
$$V=\int_0^{\infty} 2\pi xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\pi\lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\pi\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^b=2\pi$$

PROBLEMA 3

ⓐ $R = \cos(3\theta)$

$R = \cos 3\theta = 0 \Leftrightarrow 3\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

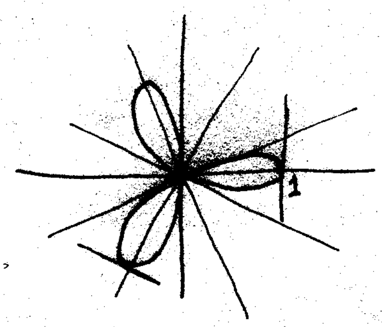
$3\theta = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$



Los valores $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ hacen R negativo (por ejemplo para $\theta = \frac{\pi}{3}$ $R = -1$ por eso la gráfica aparece en el sector opuesto.

Valores $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Al ser simétrica respecto del eje polar $(f(\cos\theta))$ la gráfica completa será:



que queda pintada completamente dando sólo valores a $\theta \in [0, \pi]$ (Rosa de 3 hojas/pétalos)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta} = \frac{-3\operatorname{sen}(3\theta)\operatorname{sen}\theta + \cos 3\theta \cos\theta}{-3\operatorname{sen}(3\theta)\cos\theta - \cos 3\theta . \operatorname{sen}\theta}$$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=0} = \frac{1}{0} \Rightarrow$ pendiente vertical, pto. contacto $(1, 0)$

$x = 1$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ pto. de contacto $x = R\cos\theta = (-1)\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$y = R\operatorname{sen}\theta = (-1)\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ecuación tg: $y + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

(b) $$\text{Área hoja} = 2\,\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \cos^2(3\theta)\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{1+\cos 6\theta}{2}\,d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\operatorname{sen} 6\theta}{12}\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12}$$

(c) $$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\,d\theta$$

$$L_{\text{hoja}} = 2\int_0^{\pi/6} \sqrt{\cos^2 3\theta + (-3\operatorname{sen} 3\theta)^2}\,d\theta$$

4.- Resolver la ecuación diferencial $y'' = y$ con las condiciones iniciales $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

Comprobar que la solución obtenida es $y = \operatorname{senh} x + 2\cosh x$.

La ecuación diferencial es una ecuación homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, su solución será combinación de soluciones independientes.
Para saber que tipo de soluciones usaremos hallamos las raíces del polinomio característico del operador lineal:

$$p(\lambda) \equiv \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Al ser dos raíces simples distintas la solución será combinación de las funciones:

$$\left\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\right\} = \left\{e^{x}, e^{-x}\right\}$$

Así: $y = Ae^{x} + Be^{-x}$ Para calcular los coeficientes usamos las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = A + B = 2 \\ y'(0) = A - B = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \dfrac{3}{2} \\ B = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

La solución final es por tanto: $y(x) = \dfrac{3e^{x} + e^{-x}}{2}$

Para la segunda parte utilizamos las igualdades trigonométricas:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$y = \operatorname{senh} x + 2\cosh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} + \dfrac{2e^{x} + 2e^{-x}}{2} = \dfrac{3e^{x} + e^{-x}}{2}$ que es la solución previamente obtenida

Solución Problema 5.

- **Teorema**: Si f es derivable en a, f es continua en a

- **Teorema fundamental del cálculo**:
  Si f es continua en $[a,b]$ entonces
  $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y $F'(x) = f(x)$
  $\forall x \in [a,b]$

- **Demostración**
  Si f es derivable en I, f es continua en I,
  Como $[a,b] \subset I$, f es continua en I.
  Por el Teorema fundamental del Cálculo,
  $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y su
  derivada es $F'(x) = f(x)$

  c. q. d.