ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

3 de septiembre de 2007

Tiempo: 2 horas 30 minutos

Cada problema debe comenzarse en una nueva hoja de examen.

No se permite entregar el examen a lápiz.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: martes 11 de septiembre de 2007

Fecha prevista de revisión de exámenes: jueves 13 de septiembre de 2007

PROBLEMA 1.

Hallar el lugar geométrico de los afijos de los números complejos z tales que $\mathrm{Re}\left(\frac{z-i}{1+i-z}\right)=0$. Identificar y representar dicho lugar geométrico en el plano $\mathbb{R}^2$.

(1,5 puntos)

PROBLEMA 2.

Dada la función $f(x)=\frac{|x|^3}{|x-3|}$, se pide:

a) Estudiar la derivabilidad de la función en $x=0$ y en $x=3$

b) Determinar los extremos relativos de $f(x)$, así como sus asíntotas, si las hubiera.

c) ¿Se puede asegurar que la función alcanza extremos absolutos en el intervalo $\left[-3\ ,\ \frac{5}{2}\right]$? Calcularlos en caso afirmativo.

(3 puntos)

PROBLEMA 3.

Sea la región $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\le \operatorname{senh} x \ \wedge\ y\ge 0\ \wedge\ 0\le x\le \ln 2\right\}$. Se pide:

a) Calcular el área de R.

b) Calcular el volumen de revolución obtenido al girar R alrededor de la recta $x=\ln 2$.

c) Calcular el volumen de revolución obtenido al girar R alrededor del eje OX.

(3 puntos)

PROBLEMA 4.

Dada la familia de curvas $3y^2-2y^3=6x+C,\ C\in\mathbb{R}$, determinar su haz ortogonal $z=z(x)$ y hallar la curva del mismo que verifica $z(0)=\frac{1}{4}$

(1,5 puntos)

PROBLEMA 5.

Enunciar el Teorema del Valor Medio para funciones derivables: Teorema de Lagrange.

Utilizar este Teorema para demostrar:

$$\left|e^a-e^b\right|\ge|a-b|,\ \forall a,b\in[0,\infty)$$

(1 punto)

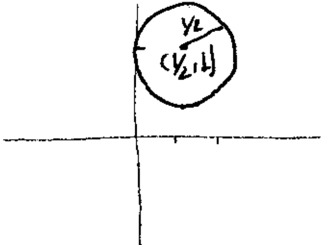
PROBLEMA 1

$z = x + iy$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-i}{1+i-z}\right)=0; \quad \operatorname{Re}\left[\frac{x-i(1-y)}{(1-x)+i(1-y)}\right]=0; \quad \operatorname{Re}\left[\frac{x-i(1-y)}{(1-x)+i(1-y)}\;\frac{(1-x)-i(1-y)}{(1-x)-i(1-y)}\right]=0$$

$$\frac{x(1-x)-(1-y)^2}{(1-x)^2+(1-y)^2}=0; \quad x^2-x+y^2-2y+1=0; \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$$

circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y radio $\frac{1}{2}$.



PROBLEMA 2.

La función $f(x)=\dfrac{|x|^3}{|x-3|}$, que no está definida en $x=3$, se expresa sin valores absolutos:

$$|x|\begin{cases} x<0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{-x^3}{|x-3|} \rightarrow |x-3|\begin{cases} x<3 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{x-3} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x<0\\ x<3\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x\in(-\infty,0) \\ x>3 \Rightarrow f(x)=\dfrac{-x^3}{x-3} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x<0\\ x>3\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \varnothing \end{cases} \\ x\geq 0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{|x-3|} \rightarrow |x-3|\begin{cases} x<3 \Rightarrow f(x)=\dfrac{-x^3}{x-3} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\geq 0\\ x<3\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x\in[0,3) \\ x>3 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{x-3} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\geq 0\\ x>3\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x\in(3,\infty) \end{cases} \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x-3}, & x\in(-\infty,0) \\ -\dfrac{x^3}{x-3}, & x\in[0,3) \\ \dfrac{x^3}{x-3}, & x\in(3,\infty) \end{cases}$$

a) **Derivabilidad en** $x=0$, con $f(0)=0$, se estudia aplicando la definición de derivadas laterales:

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{\dfrac{h^3}{h-3}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2}{h-3}=0 \text{ y } f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{-\dfrac{h^3}{h-3}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}-\frac{h^2}{h-3}=0$$

Al ser iguales las derivadas laterales, la función es derivable en el punto, con $f'(0)=0$.

Derivabilidad en $x=3$: la función no está definida, por lo que no es derivable.

b) **Extremos relativos.** La función es derivable en su dominio, $\mathbb{R}-\{3\}$, por lo que los extremos se encontrarán entre los puntos críticos que se obtienen al resolver la ecuación $f'(x)=0$. La expresión de la función derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2(2x-9)}{(x-3)^2} & x\in(-\infty,0) \\ 0 & x=0 \\ -\dfrac{x^2(2x-9)}{(x-3)^2} & x\in(0,3) \\ \dfrac{x^2(2x-9)}{(x-3)^2} & x\in(3,\infty) \end{cases},$$

por lo que los puntos críticos son $x=0,\frac{9}{2}$. Estudiando el signo de la derivada, para lo cual basta estudiar el signo de $(2x-9)$, y **aplicando el criterio de la primera derivada** se tiene:

$\begin{cases} f'(0^-)<0 \\ f'(0^+)>0 \end{cases}$, mínimo relativo de $f(x)$ en el punto $x=0$, con $f(0)=0$.

$\begin{cases} f'\left(\frac{9}{2}^-\right)<0 \\ f'\left(\frac{9}{2}^+\right)>0 \end{cases}$, mínimo relativo de $f(x)$ en el punto $x=\frac{9}{2}$, con $f\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{243}{4}$.

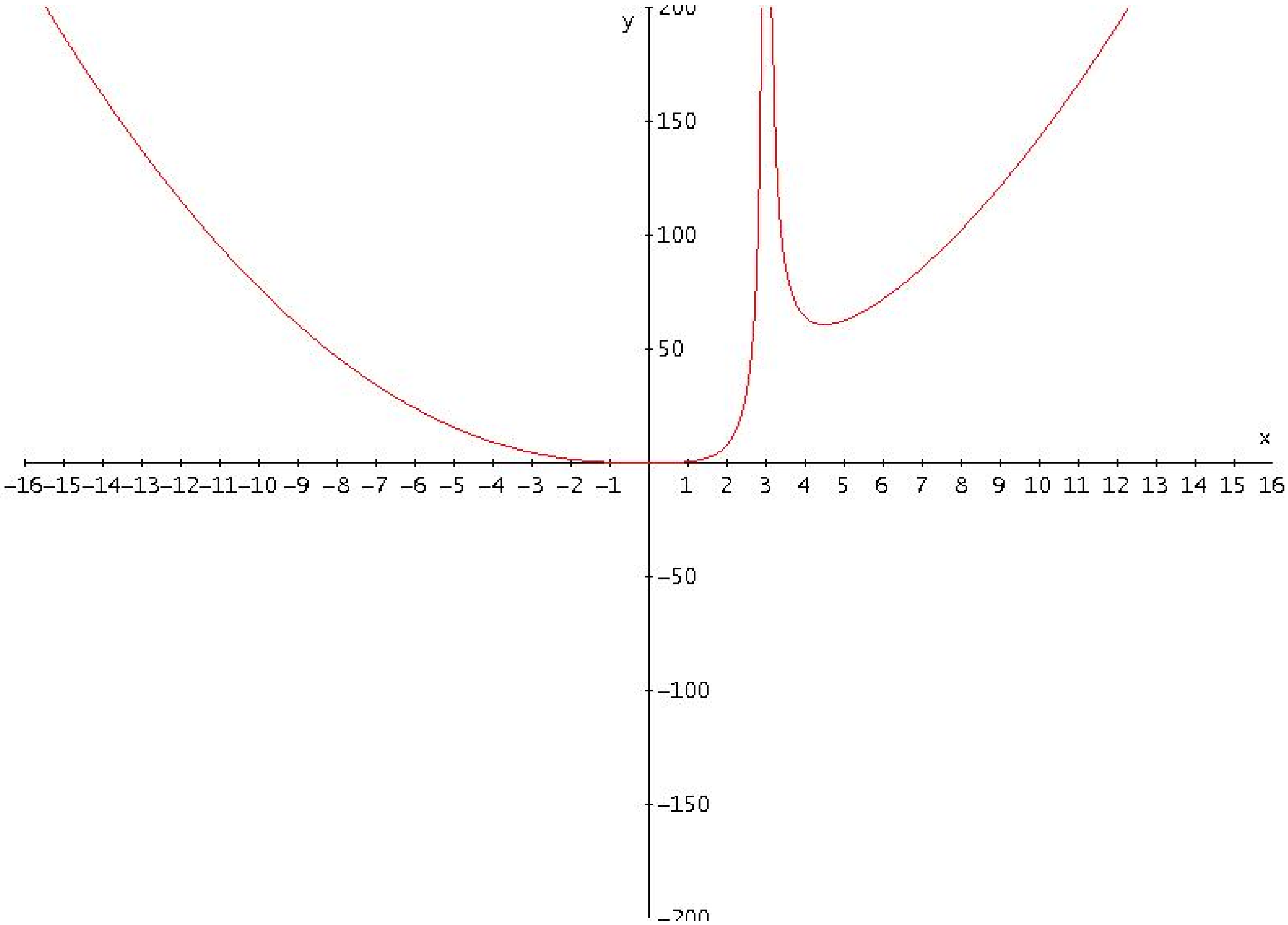
Asíntotas. La función presenta una asíntota vertical $x=3$, con $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\infty$. Se aplica la definición para determinar posibles asíntotas horizontales u oblicuas $y=mx+b$. $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{x^3}{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x-1}=\pm\infty$, por lo que la función no presenta asíntotas verticales u oblicuas.

c) **Extremos absolutos en el intervalo** $\left[-3,\frac{5}{2}\right]$**.** La función es continua en el intervalo cerrado y acotado (es continua en $x=0$ ya que es derivable en el punto) por lo que aplicando el **Teorema de Weierstrass** se puede garantizar que la función alcanza en el intervalo valores máximo y mínimo absolutos. Los puntos donde la función puede alcanzar los valores extremos absolutos son:

◆ Extremos relativos en el intervalo: $f(0)=0$

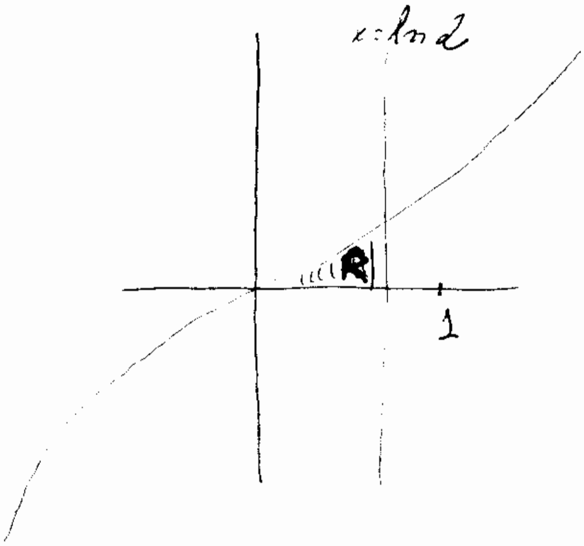
◆ Puntos extremos del intervalo: $\begin{cases} f(-3)=\dfrac{9}{2} \\ f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{\frac{125}{8}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{125}{4} \end{cases}$

En conclusión los extremos absolutos de la función en el intervalo son: $\begin{cases} \text{máximo absoluto: } f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{125}{4} \\ \text{mínimo absoluto: } f(0)=0 \end{cases}$



Gráfica de la función

PROBLEMA 3



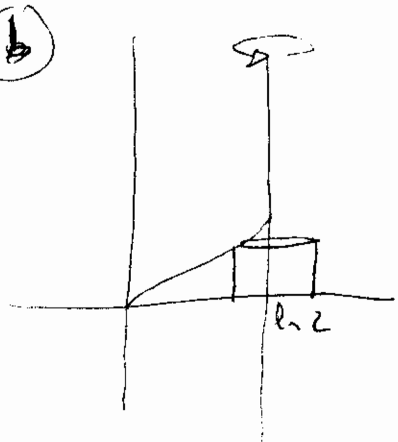
(a) $A = \int_0^{\ln 2} \operatorname{senh} x \, dx = \cos x \Big]_0^{\ln 2} = \frac{1}{4}$

$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

$\cosh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{5}{4}$

$\cosh(0) = 1$

(b)



POR TUBOS.

$V = 2\pi \int_0^{\ln 2} \underbrace{(\ln 2 - x)}_{R} \underbrace{\operatorname{senh} x}_{h} \, dx =$

Por partes:

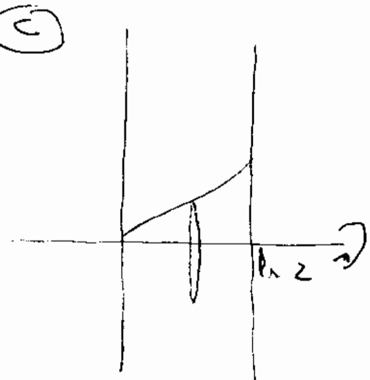
$u = \ln 2 - x \qquad du = -dx$

$dv = \operatorname{senh} x \, dx \qquad v = \cosh x$

$= \Big[(\ln 2 - x)\cosh x + \int \cosh x \, dx\Big]_0^{\ln 2} = \pi\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right)$

$\operatorname{senh}(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{3}{4}$

(c)



POR DISCOS.

$V = \pi \int_0^{\ln 2} \underbrace{\operatorname{senh}^2 x}_{R^2} \, dx = \pi \int_0^{\ln 2} \frac{\cosh 2x - 1}{2} \, dx =$

$\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{senh} 2x - x\right]_0^{\ln 2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{15}{16} - \ln 2\right)$

$\operatorname{senh}(2\ln 2) = \frac{e^{\ln 2^2} - e^{\ln \frac{1}{2^2}}}{2} = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$

PROBLEMA 4

Dada la familia de curvas $3y^2-2y^3=6x+C,\ C\in\mathbb{R}$, determinar su haz ortogonal $z=z(x)$ y hallar la curva del mismo que verifica $z(0)=\frac{1}{4}$.

Calcular el haz ortogonal consiste en hallar la familia de curvas cuya pendiente forma ángulo recto con la dada. Es decir la relación entre las pendientes será:

$$m=\frac{-1}{m_\perp}$$

Para calcular la pendiente de la familia de curvas original derivamos implícitamente la ecuación dada:

$$3y^2-2y^3=6x+C,\ C\in\mathbb{R},$$
$$6yy'-6y^2y'=6$$
$$6y'(y-y^2)=6$$
$$y'=\frac{1}{(y-y^2)}$$

Para la familia ortogonal su pendiente será (usando la notación del enunciado),:

$$y_\perp'=z'=-(z-z^2)$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$z'=z^2-z$$
$$\frac{dz}{dx}=z^2-z,\text{por separación de variables}$$
$$\frac{dz}{z^2-z}=dx,\ \text{integrando ambos lados de la ecuación}$$
$$\int\frac{dz}{z^2-z}=\int dx$$
$$\frac{1}{z^2-z}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}\rightarrow A(z-1)+Bz=1\rightarrow\begin{cases}A+B=0\\-A=1\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}A=-1\\B=1\end{matrix}$$
$$\int\frac{dz}{z^2-z}=\int\frac{dz}{z-1}-\int\frac{dz}{z}=\ln(z-1)-\ln z+K$$
$$\ln(\frac{z-1}{z})+K=x$$
$$\frac{z-1}{z}\cdot e^K=e^x$$
$$\frac{z-1}{z}=Ce^x,\ \text{aplicando la condicion particular } z(0)=\frac{1}{4}$$
$$\frac{1/4-1}{1/4}=C,\ C=-3$$

La curva que verifica la condición dada es $\boxed{\frac{z-1}{z}=-3e^x}$

Problema 5.

Teorema de Lagrange(Teorema del valor medio para funciones derivables)

Si f es continua en $[a,b]$ y f derivable (a,b) entonces existe un $c\in(a,b)$ en donde $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Corolario

$\left\|e^a-e^b\right\|\geq\|a-b\| \quad \forall a,b\in[0,\infty)$

Demostración del corolario:

$f(x)=e^x$ *es continua y derivable en cualquier intervalo* $[a,b]\subset[0,\infty)$. Por el teorema de Lagrange: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\Longrightarrow e^b-e^a=e^c(b-a)$

La función exponencial es mayor o igual que 1 en $[0,\infty)$**:**

$e^b-e^a=e^c(b-a)\geq b-a \quad \forall[a,b]\subset[0,\infty)$

Como la función es creciente : $\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=\dfrac{e^a-e^b}{a-b}=\left|\dfrac{e^a-e^b}{a-b}\right|$ *luego*

$\left|\dfrac{e^a-e^b}{a-b}\right|\geq 1\Rightarrow\left|e^a-e^b\right|\geq|a-b| \quad \forall a,b\in[0,\infty)$ **c.q.d.**