ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

25 de junio de 2008

Tiempo: 2 horas y 30 minutos

Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: 7 de julio de 2008

Fecha prevista de revisión de exámenes: 9 de julio de 2008

PROBLEMA 1.

a) Probar que $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^{10} = -2^9\left(1+\sqrt{3}\,i\right)$.

b) Obtener y representar en el plano todos los números complejos z solución de la ecuación:

$$\mathrm{Im}\left[\frac{z+3i}{2e^{i\pi/4}}\right]=1$$

1,5 PUNTOS

PROBLEMA 2.

La expresión $\ln\left[\mathrm{sen}^3(xy)\right]-\cos(xy)=0$ define de forma implícita una función $y=y(x)$ en un entorno del punto $(x,y)=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$. Se pide:

a) Calcular la derivada de la función $y(x)$ en $x=1$.

b) Determinar y representar el polinomio de Taylor de grado 2, centrado en $x=1$, de dicha función.

2,0 PUNTOS

PROBLEMA 3.

Sea R la región plana limitada por: $y=\tan x$, $x=0$ e $y=1$.

a) Calcular el área de la región R integrando respecto de la variable x.

b) Calcular el mismo área del apartado a) integrando respecto de la variable y.

c) Plantear por los métodos de tubos y discos las integrales que calcularían el volumen de revolución del sólido generado cuando la región R gira alrededor del eje OX. Calcular el volumen resolviendo el método de discos.

3,5 PUNTOS

PROBLEMA 4.

Sea $y(t)$ el desplazamiento de un determinado sistema libre masa-muelle-amortiguador, solución de la ecuación diferencial con condiciones iniciales $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=0$, $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$.

a) Determinar la función $y(t)$.

b) Calcular, para $t\geq 0$, los valores extremos del desplazamiento $y(t)$ y de la velocidad $y'(t)$.

c) Representar la función $y(t)$, para $t\geq 0$.

2,0 PUNTOS

PROBLEMA 5.

Demostrar el teorema de valor medio para integrales:

"Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$"

1,0 PUNTO

Problema 1

a) $(1+\sqrt{3}i)^{10}$; $z_0 = 1+\sqrt{3}i$; $|z_0| = \sqrt{1+3} = 2$, $\theta_0 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$

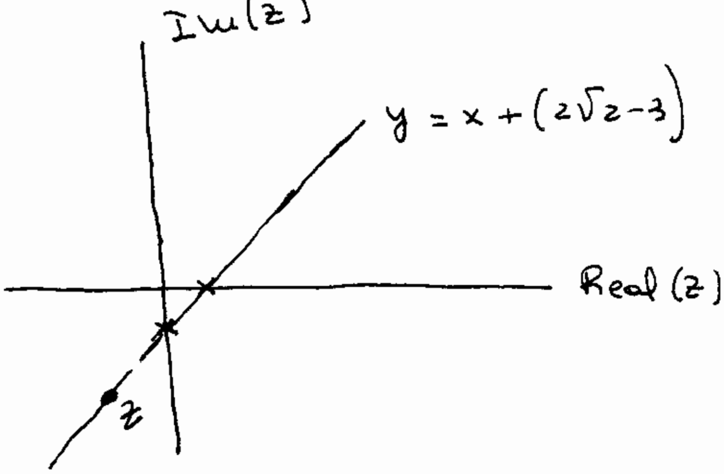
$z_0^{10} = 2^{10} e^{i\frac{10\pi}{3}} = 2^{10} e^{-\frac{2\pi}{3}i}$; en forma binómica :

$$z_0^{10} = 2^{10}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= 2^{10}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{9}(1+\sqrt{3}i) \quad \text{c.q.d.}$$

b) $$\frac{z+3i}{2e^{i\pi/4}} = \frac{x+i(y+3)}{\cancel{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)} = \frac{x+i(y+3)}{\sqrt{2}(1+i)}\,\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{(x+y+3)+i(y+3-x)}{2\sqrt{2}}$$

$\operatorname{Im}\left(\frac{z+3i}{2e^{i\pi/4}}\right) = 1$; $\frac{y+3-x}{2\sqrt{2}} = 1$; $y = x + (2\sqrt{2}-3)$

$z = x + i\,(x + 2\sqrt{2} - 3)$



Problema 2 : [Cálculo I. Junio 2008]

La expresión $\ln[\operatorname{sen}^3(xy)] - \cos xy = 0$ define de forma implícita una función $y = y(x)$ en un entorno del punto $(1, \frac{\pi}{2})$

a) Derivando implícitamente sabiendo que $y = y(x)$:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^3(xy)} \cdot 3\operatorname{sen}^2(xy) \cdot \cos(xy)\,[y + xy'] + \operatorname{sen}(xy)[y + xy'] = 0$$

Sustituyendo $y(1) = \pi/2$

$$\Bigg[\underbrace{\frac{3 \cdot \cos(\pi/2)}{\operatorname{sen}(\pi/2)}}_{0} + \operatorname{sen}(\pi/2)\Bigg] \cdot \left[\frac{\pi}{2} + y'(1)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y'(1) = -\pi/2}$$

b) Polinomio de Taylor de $y(x)$ de grado 2 centrado en $x = 1$.

$$y(x) \approx y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2$$

Derivamos implícitamente la expresión:

$$\left[\frac{3\cos(xy)}{\operatorname{sen}(xy)} + \operatorname{sen}(xy)\right] \cdot [y + xy'] = 0$$

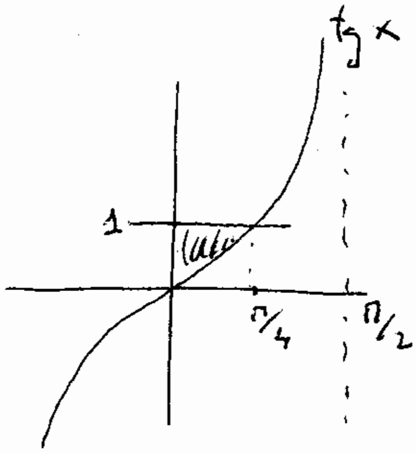
$$\frac{d}{dx}[\quad]\,[y + xy'] + [\quad]\,[y' + y' + xy''] = 0$$

Como en $(1, \pi/2)$: $y + xy' = 0$ entonces

$2y' + xy'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y''(1) = +2\frac{\pi}{2} = \boxed{\pi}$

$$\boxed{P_2(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi}{2}(x-1)^2}$$

PROBLEMA 3



ⓐ $$\int_0^{\pi/4} (1 - \operatorname{tg} x)\, dx = \int_0^{\pi/4} \left(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) dx =$$

$$= \Big[x + \ln(\cos x)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ⓑ $$\int_0^1 \operatorname{arctg} y \, dy = \Big[y \operatorname{arctg} y\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{1+y^2}\, dy =$$

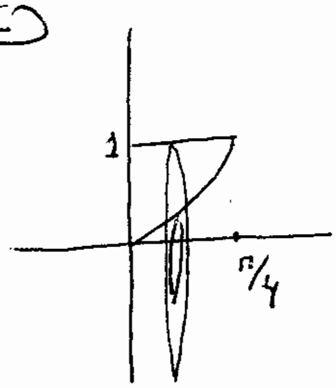
Por partes:

$u = \operatorname{arctg} y \qquad du = \dfrac{1}{1+y^2}\, dy$

$dv = dy \qquad v = y$

$$= \Big[y \operatorname{arctg} y\Big]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ⓒ



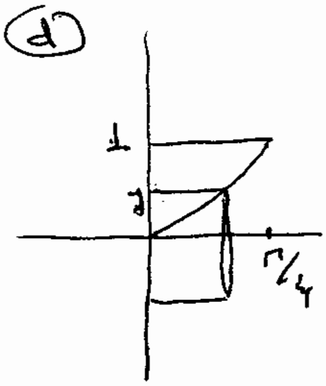
DISCOS:

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} (1^2 - \operatorname{tg}^2 x)\, dx = \pi \int_0^{\pi/4} (2 - \sec^2 x)\, dx =$$

$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$

$$= \pi \Big[2x - \operatorname{tg} x\Big]_0^{\pi/4} = \pi\left(2\frac{\pi}{4} - 1\right) = \frac{\pi^2}{2} - \pi$$

ⓓ



TUBOS:

$$V = 2\pi \int_0^1 y \operatorname{arctg} y \, dy$$

PROBLEMA 4

a) La ecuación diferencial ordinaria es **homogénea, lineal de segundo orden con coeficientes constantes**. Para resolverla se hallan las raíces del **polinomio característico**: $\lambda^2+2\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-1$ doble

Al ser una raíz doble, el **sistema fundamental de soluciones** de la ecuación diferencial es $\{e^{-t}, te^{-t}\}$, y la **solución general de la ecuación** es: $y(t)=Ae^{-t}+Bte^{-t}$ con $A,B\in\mathbb{R}$. Para imponer las condiciones iniciales se halla la derivada $y'(t)=(-A+B-Bt)e^{-t}$ con $A,B\in\mathbb{R}$ y las **condiciones iniciales conducen a determinar los parámetros** $A,B\in\mathbb{R}$, $\left.\begin{matrix} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \end{cases}$. $\boxed{\text{La solución es } y(t)=te^{-t}}$.

b) Al ser $y(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$, para resolver el apartado basta con estudiar los **intervalos de signo de la derivada** $y'(t)$ **y de la derivada segunda** $y''(t)$, y aplicar los teoremas correspondientes.

$$y(t)=te^{-t} \Rightarrow \begin{cases} y'(t)=(1-t)e^{-t} \\ y''(t)=\underbrace{-[y(t)+2y'(t)]}_{\text{DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL}}=-(2-t)e^{-t} \end{cases}$$

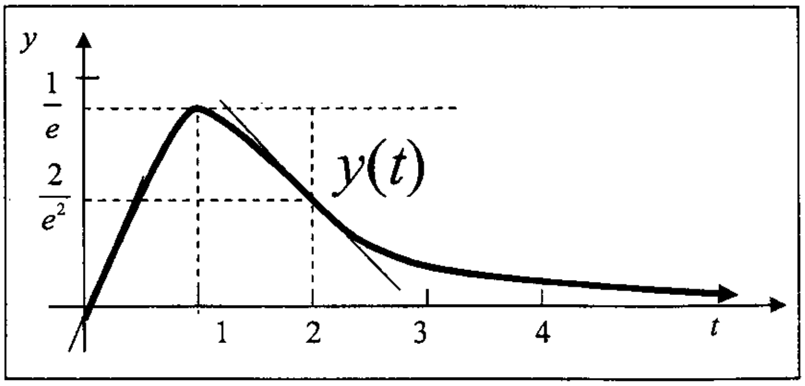
Intervalos de crecimiento del desplazamiento $\begin{matrix} y'(t)>0 \Rightarrow y(t) \text{ es creciente} \\ y'(t)<0 \Rightarrow y(t) \text{ es decreciente} \end{matrix}$

- Desplazamiento creciente $\forall t\in(0,1)$
- Desplazamiento decreciente $\forall t\in(1,\infty)$
  - $\boxed{\text{Máximo absoluto del desplazamiento en } t=1,\ y(1)=\frac{1}{e}}$,
  - $\boxed{\text{Mínimo absoluto del desplazamiento en } t=0,\ y(0)=0}$, ya que la función tiene una asíntota horizontal $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=\lim\limits_{t\to\infty}(te^{-t})=0$

Intervalos de crecimiento de la velocidad $\begin{matrix} y''(t)>0 \Rightarrow y'(t) \text{ es creciente} \\ y''(t)<0 \Rightarrow y'(t) \text{ es decreciente} \end{matrix}$

- Velocidad creciente $\forall t\in(2,\infty)$
- Velocidad decreciente $\forall t\in(0,2)$
  - $\boxed{\text{Máximo absoluto de la velocidad en } t=0,\ y'(0)=1}$, ya que la velocidad tiene una asíntota horizontal $\lim\limits_{t\to\infty} y'(t)=\lim\limits_{t\to\infty}([1-t]e^{-t})=0$
  - $\boxed{\text{Mínimo absoluto de la velocidad en } t=2,\ y'(2)=-\frac{1}{e^2}}$.

c) Para representar la función **se tienen en cuenta los resultados de los apartados a), b)** considerando la existencia de **asíntota horizontal** $y=0$ para la función y también que los intervalos de **concavidad de la función desplazamiento se corresponden con los intervalos de crecimiento de la velocidad**.
Una posible gráfica:



PROBLEMA 5

Si la función es constante en el intervalo $f(x)=K$, $x\in[a,b]$, al integrar se obtiene $\int_a^b f(x)dx = K(b-a)$ y queda demostrado que el Teorema se cumple para cualquier $c\in[a,b]$, ya que $f(c)=K$.

En el caso $a=b$ se cumple $\int_a^a f(x)dx = 0$, con lo que el Teorema se verifica para $c=a$.

Si $f(x)$ no es constante y $a<b$, al ser continua la función en el intervalo cerrado $[a,b]$ el Teorema del Valor Extremo (Teorema de Weierstrass) garantiza que la función alcanza en el intervalo su valor máximo absoluto y su valor mínimo absoluto:

$$\exists x_1, x_2 \in [a,b] / m = f(x_1) \le f(x) \le M = f(x_2), x\in[a,b]$$

Aplicando las propiedades de la integración definida:

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Como $a<b$, operando:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} \le M$$

Se define el valor medio integral $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$, y puede escribirse:

$$m \le \mu \le M$$

Aplicando el Teorema del Valor Intermedio (Teorema de Darboux) a la función $f(x)$, continua en el intervalo cerrado $[x_1,x_2]\subseteq[a,b]$, (supuesto $x_1<x_2$ y en otro caso se considera $[x_2,x_1]$) se puede garantizar que para cualquier valor $\mu\in[f(x_1),f(x_2)]$ existe un valor $c\in[x_1,x_2]$ con $f(c)=\mu$:

$$\exists c \in [x_1,x_2] / f(c) = \mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

con lo que queda demostrado el Teorema.