ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

8 de septiembre de 2009

Tiempo: 2 hora 30 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 15/09/09.
Fecha prevista de revisión de exámenes: 18/09/09.

PROBLEMA 1.

Resolver la ecuación $z^4 - iz^2 + \frac{3}{4} = 0$ siendo $z \in \mathbb{C}$. Representar en el plano complejo el polígono cuyos vértices son las soluciones de la ecuación dada y calcular su área.

PROBLEMA 2.

Sea $f(x) = 1 + ex + e^{x+1}$

a) Demostrar que la gráfica de $f(x)$ corta una única vez al eje OX. Enunciar los teoremas empleados.

b) Calcular los extremos absolutos, si existen, de la función $f(x)$ en $\mathbb{R}$. Lo mismo en el intervalo $[-1, 1]$.

c) Calcular el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 2, centrado en $x = -1$. Aproximar con dicho polinomio el valor de $f(0)$ y hallar una estimación del error cometido.

d) Enunciar la Regla de la Cadena y aplicarla para calcular la derivada de $f \circ g$, siendo $g(x) = x^2$.

PROBLEMA 3.

Sea la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + y^2 \leq 1; \quad y^2 \leq x \leq \sqrt{3}\, y\}$

a) Dibujar la región.

b) Calcular el área de la región, utilizando coordenadas polares.

c) Plantear por tubos y discos las integrales para calcular el volumen generado al girar R alrededor del eje OY.

PROBLEMA 4.

Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$.
Demostrar que $F(x)$ es creciente y enunciar el teorema empleado. Estudiar la concavidad de la función.

PUNTUACIÓN: Problema 1: 1,5 ptos. Problema 2: 3,5 ptos. Problema 3: 3,5 ptos. Problema 4: 1,5 ptos.

Solución Examen Cálculo I ~~Enero 2008-09~~ Sept 2009

Problema 1

Resuelve la ecuación $z^4 - iz^2 + 3/4 = 0$

Solución

Haciendo el cambio: $t = z^2$:

$$t^2 - it - 3/4 = 0 \Rightarrow t = \frac{i \pm \sqrt{i^2 - 4.(-3)/4}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{i \pm 2i}{2} = \begin{cases} 3i/2 \\ -i/2 \end{cases}$$

Las cuatro soluciones vienen dados por dos ecuaciones

$$\begin{cases} z^2 = 3i/2 \\ z^2 = -i/2 \end{cases}$$

La ecuación $z^2 = 3i/2 \Leftrightarrow (\rho_\alpha)^2 = \sqrt{3/2}_{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \rho^2_{2\alpha} = \sqrt{3/2}_{\frac{\pi}{2}+2k\pi} \begin{cases} \rho^2 = \sqrt{3/2} \\ 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

da dos soluciones con módulo $\rho = \sqrt{3/2}$ y argumentos:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4}; \alpha_1 = \frac{5\pi}{4}$$

y sus afijos están en una misma recta.

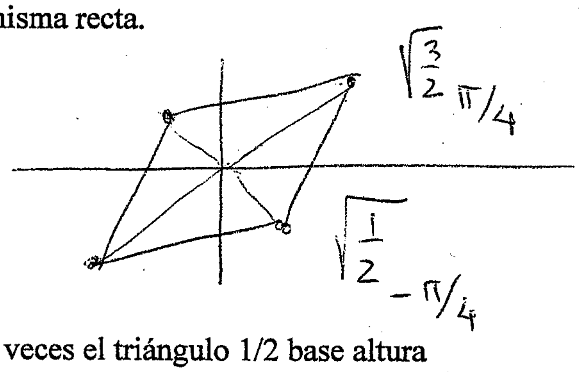
La ecuación

$$z^2 = -i/2 \Leftrightarrow (\rho_\alpha)^2 = \sqrt{1/2}_{-\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \rho^2_{2\alpha} = \sqrt{1/2}_{-\frac{\pi}{2}+2k\pi} \begin{cases} \rho^2 = \sqrt{1/2} \\ 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \; k = 0,1,2 \end{cases}$$

da dos soluciones con módulo $\rho = \sqrt{1/2}$ y argumentos:

$$\alpha_0 = \frac{-\pi}{4}; \alpha_1 = \frac{3\pi}{4}$$

sus afijos están en la misma recta.



Area del rectángulo: 4 veces el triángulo 1/2 base altura

$$4.\frac{1}{2}\sqrt{3/2}\sqrt{1/2} = \sqrt{3}$$

PROBLEMA 2.

SOLUCIÓN

a) La función $f(x)$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y su derivada es $f'(x)=e+e^{x+1}$. Como se cumple $f'(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$, la función es estrictamente creciente (monótona) y por tanto inyectiva. Estudiando la función en el intervalo $[-1,1]$ se tiene que $f(-1)=2-e<0$ y $f(1)=1+e+e^2>0$. El Teorema de Bolzano garantiza que la gráfica de la función $f(x)$ corta al eje *OX* en algún punto del intervalo $(-1,1)$, y dado que la función es inyectiva queda demostrado que ese punto de corte es único.

Enunciados de teoremas

Criterio de la 1ª derivada "Si $f'(x)>0$ para $x\in(a,b)\Rightarrow f(x)$ es estrictamente creciente $x\in(a,b)$"

Teorema de Bolzano: "Si $f(x)$ es continua en $x\in[a,b]$ y $f(a)f(b)<0\Rightarrow\exists c\in(a,b)/f(c)=0$"

b) Los extremos absolutos de una función en un **intervalo abierto**, de existir se encuentran entre los extremos relativos de la función en ese intervalo. Los extremos relativos solo pueden alcanzarse en los puntos críticos de la función, y dado que $f(x)$ es derivable, sus puntos críticos serían las soluciones de la ecuación $f'(x)=0$, pero dado que la función es monótona con $f'(x)>0$, $f(x)$ no tiene puntos críticos, por lo tanto no tiene extremos relativos ni extremos absolutos en $\mathbb{R}$.

En el intervalo $[-1,1]$, **intervalo cerrado y acotado**, la función es continua y es de aplicación el Teorema de Weierstrass que garantiza que la función alcanza en el intervalo un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto. Como no existen extremos relativos de la función, los extremos absolutos solo pueden alcanzarse en los puntos frontera del intervalo: $f(1)=1+e+e^2>0$ máximo absoluto y $f(-1)=2-e<0$ mínimo absoluto.

c) El polinomio de Taylor de grado 2 centrado en $x=-1$ viene dado por:

$$P_2(x)=f(-1)+\frac{f'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2$$

Calculando se obtienen $f(-1)=2-e$, $f'(x)=e+e^{x+1}\Rightarrow f'(-1)=1+e$; $f''(x)=e^{x+1}\Rightarrow f''(-1)=1$

$$P_2(x)=2-e+(1+e)(x+1)+\frac{1}{2}(x+1)^2$$

El valor aproximado pedido es $f(0) \cong P_2(0) = 2 - e + (1+e) + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

El Teorema de Taylor permite estimar el error cometido: $\begin{array}{l} f(x) = P_2(x) + R_2(x) \\ R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x+1)^3, \xi \in (-1, x) \end{array}$, ya que la función es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.

El error absoluto cometido es $\varepsilon = |f(0) - P_2(0)| = |R_2(0)|$ que se estima acotando el resto $R_2(0)$:

$|R_2(0)| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!}, \xi \in (-1, 0)$. Como $f'''(x) = e^{x+1}$ es una función positiva y creciente, se cumple $|f'''(\xi)| < f'''(0) = e, \xi \in (-1, 0)$, por lo tanto $\varepsilon = |R_2(0)| < \frac{e}{6}$.

Dado que se conoce el valor exacto de la función, se puede acotar el error mediante:

$$\varepsilon = |f(0) - P_2(0)| = \left|1 + e - \frac{7}{2}\right| = \left|e - \frac{5}{2}\right| \underset{e<2.8}{<} \frac{28}{10} - \frac{5}{2} = \frac{28-25}{10} = \frac{3}{10}$$

d) Enunciados de la Regla de la Cadena:

"Si $g(x)$ es derivable en $a \in I \subset \mathbb{R}$ y $f(x)$ es derivable en $f(a) \in J \subset \mathbb{R}$ entonces $f \circ g(x)$ es derivable en $x = a$, siendo $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$"

"Si la función $u = g(x)$ es derivable en x_0 y la función $y = f(u)$ es derivable en $u_0 = g(x_0)$ entonces la función definida por $F(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$ es derivable en x_0 siendo $\frac{dF}{dx}(x_0) = \frac{df}{du}(u_0) \cdot \frac{dg}{dx}(x_0)$"

Dado que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en $\mathbb{R}$, puede aplicarse la Regla de la Cadena, siendo $F(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$ derivable en $\mathbb{R}$.

Utilizando la notación $y = f(u) = 1 + eu + e^{u+1}$, $u = g(x) = x^2$ y operando se obtiene:

$$\frac{dF}{dx}(x) = \frac{df}{du}(u) \cdot \frac{dg}{dx}(x) = \left(e + e^{u+1}\right)(2x) \underset{u=x^2}{=} \left(e + e^{x^2+1}\right)(2x)$$

Problema 3

Región: * $(x-1)^2+y^2 \leq 1$ círculo de centro $(1,0)$, $r=1$.

* $y^2 \leq x$ frontera y puntos interiores a ~~la~~ parábola de vértice $(0,0)$ y eje OX

* $x \leq \sqrt{3}\, y$ semiplano limitado por la recta que pasa por el origen y pend. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

* Puntos de corte de la parábola y la circunferencia

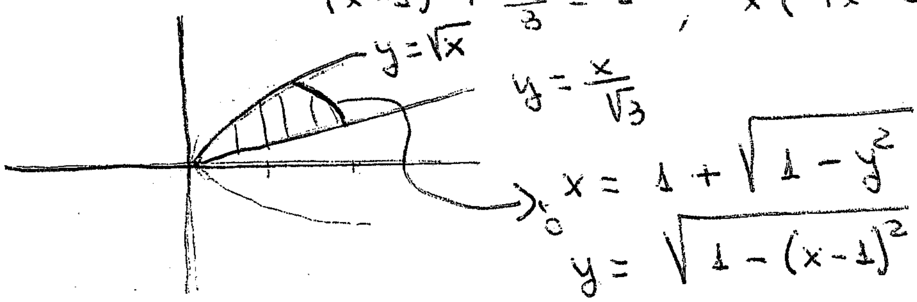
$(x-1)^2+x=1$; $(x-1)[x-1+1]=0$; $x=1$, $y=\pm 1$

$x=0$ $y=0$.

* Puntos de corte de la circunferencia y la recta

$(x-1)^2+\frac{x^2}{3}=1$; $x(4x-6)=0$; $x=0$, $y=0$

$x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$



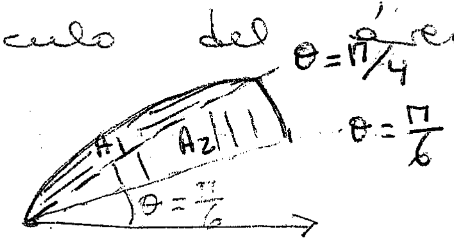
b) Ecuaciones en polares de las curvas fronteras:

① circunferencia $\rho = 2\cos\theta$

② parábola $\rho = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$

③ recta $\theta = \frac{\pi}{6}$

* cálculo del área:



$\cap$ parábola y circunf.

$\theta_1=\frac{\pi}{4}$, $\theta_2=\frac{\pi}{2}$

$\cap$ circunf. y recta: $\theta_3=\frac{\pi}{6}$

$\theta_4=\frac{\pi}{4}$

El área viene dada por $\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho^2(\alpha)\,d\alpha$

aplicada a este ejercicio $A = A_1 + A_2$ siendo

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\,d\theta \quad y \quad A_2 = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} 4\cos^2\theta\,d\theta$$

* Cálculo de A_2; $I_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/4} (2+2\cos 2\theta)\,d\theta = 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/4}$

$$= \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$$

* Cálculo de A_1; como la función es par en $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, entonces $tg\,\theta = t$, $d\theta = \frac{dt}{1+t^2}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

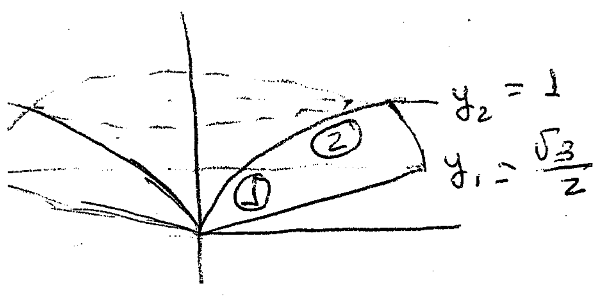
y $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; limites $\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = 1$.
$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow t \rightarrow \infty$

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2\,\frac{t^4}{(1+t^2)}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b t^{-4}\,dt = -\frac{1}{3}\frac{1}{t^3}\Big]_1^b =$$

$$-\frac{1}{3}\left[\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^3} - 1\right] \quad ; \quad A_1 = \frac{1}{6}$$

$$A = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{7}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)u^2.$$

c) * Cálculo del volumen por discos.



$$V = V_1 + V_2$$

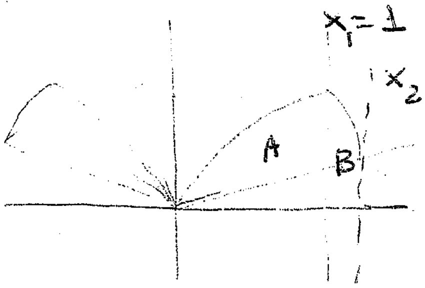
$$V_1 = \pi\int_0^{y_1}(r_r^2 - r_p^2)\,dy = \pi\int_0^{\sqrt{3}/2}\left[(\sqrt{3}y)^2 - y^4\right]dy$$

$$V_2 = \pi\int_{y_1}^{y_2}(r_c^2 - r_p^2)\,dy = \pi\int_{\sqrt{3}/2}^{1}\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)^2 - y^4$$

volumen total por discos

$$V = \pi\left[\int_0^{\sqrt{3}/2}(3y^2 - y^4)\,dy + \int_{\sqrt{3}/2}^{1}\left[1+\sqrt{1-y^2}\right]^2 - y^4\right]dy\Big]$$

* Cálculo del volumen por tubos



$x_1 = 1$

$x_2 = \frac{3}{2}$

$V = V_A + V_B$

$$V_A = 2\pi \int_0^1 x\,(h_p - h_r)\,dx = 2\pi \int_0^1 x\left(\sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)dx$$

$$V_B = 2\pi \int_1^{3/2} x\,(h_c - h_r)\,dx = 2\pi \int_1^{3/2} x\left(\sqrt{1-(x-1)^2} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)dx$$

$$V = 2\pi\left[\int_0^1 x\left(\sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)dx + \int_1^{3/2} x\left(\sqrt{1-(x-1)^2} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)dx\right]$$

PROBLEMA 4

Por el Teorema fundamental del Cálculo:

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ con $a \le x \le b$ $\Rightarrow$

- $F(x)$ es continua en $[a,b]$
- $F(x)$ es derivable en (a,b)
- $F'(x) = f(x)$

En nuestro caso $F(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ es continua $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ $\forall x$

luego $F(x)$ es creciente $\forall x \in \mathbb{R}$.

Para estudiar la concavidad de $F(x)$ vemos $F''(x)$

$F''(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\forall x < 0$ $F''(x) > 0 \Rightarrow F(x)$ es cóncava hacia arriba

$\forall x > 0$ $F''(x) < 0 \Rightarrow F(x)$ cóncava hacia abajo

$x = 0 \Rightarrow F''(x) = 0$. Pto. de inflexión porque cambia el signo de $F''(x)$, es decir, su concavidad.