ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

18 de enero de 2010

Tiempo: 2horas 30 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 02/02/10.
Fecha prevista de revisión de exámenes: 04/02/10.

PROBLEMA 1.

Resolver la ecuación: $z^4+16=(1-i)^4z^2$

PROBLEMA 2.

Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\ln|x|} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

a) Hallar el dominio de $f(x)$ y estudiar su continuidad y derivabilidad en $x=0$.
b) Estudiar la existencia de asíntotas y posibles simetrías.
c) Estudiar los intervalos de crecimiento y extremos relativos.
d) Estudiar los intervalos de concavidad y puntos de inflexión.
e) Con los datos anteriores hacer la gráfica de $f(x)$.
f) Buscar una aproximación de $f(5)$ utilizando la aproximación lineal centrada en $x=e^2$. (Dejar indicado el resultado).

PROBLEMA 3.

a) ¿Se puede calcular el área existente entre la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y el eje OX? En caso afirmativo calcular dicha área y en caso negativo razonar la respuesta.
b) Sea la región $R=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \,/\, \dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{1}{1+x^2}\right\}$
Calcular el volumen generado al girar R alrededor de la recta $x=1$.
c) Plantear por el método de discos las integrales para calcular el volumen generado al girar R alrededor del eje OX.

PROBLEMA 4.

a) Enunciar el teorema de Rolle y demostrar que $F(x)=\int_0^{senx} e^{t^2}\,dt$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[0,\pi]$.
b) En el intervalo $[0,\pi]$ ¿Existe la inversa de F(x)? (Razonar la respuesta).

PUNTUACIÓN: Problema 1: 1,5 ptos. Problema 2: 3,5 ptos. Problema 3: 3 ptos. Problema 4: 2 ptos.

Solución   Ex. Calculo I. Enero 2000

P1 $z^4+16=(1-i)^4 z^2$

$1-i=\sqrt{2}_{-\pi/4}$ $(1-i)^4=(\sqrt{2})^4_{-\frac{4\pi}{4}}=4_{-\pi}=-4$

$z^4+4z^2+16=0$ $t=z^2$ $t^2+4t+16=0$

$t=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 16}}{2}=-2\pm 2\sqrt{-3}=\boxed{-2\pm 2\sqrt{3}i}$

$$\begin{cases} z^2=-2+2\sqrt{3}i = 4_{2\pi/3} \\ z^2=-2-2\sqrt{3}i = 4_{-2\pi/3} \end{cases}$$

$(\rho_\alpha)^2=4_{\frac{2\pi}{3}+2k\pi} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2=4 \\ 2\alpha=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$ $\alpha_0=\frac{\pi}{3}$, $\alpha_1=\frac{4\pi}{3}$

$(\rho_\alpha)^2=4_{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2=4 \\ 2\alpha=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$ $\alpha_0=-\frac{\pi}{3}$, $\alpha_1=\frac{2\pi}{3}$

Soluciones $\{2_{\pi/3},\ 2_{4\pi/3},\ 2_{-\pi/3},\ 2_{2\pi/3}\}$

$=\{1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i,\ -1+\sqrt{3}i\}$

SOLUCIÓN PROBLEMA 2

Se expresa la función sin valor absoluto: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\ln(-x)} & x<0\\ 0 & x=0\\ \dfrac{x}{\ln x} & x>0\end{cases}$

a) **Dominio de la función** $\{x\in\mathbb{R} / x\neq\pm1\}$, ya que para $x=\pm1$ la función no está definida

$$x\to\pm1\Rightarrow f(x)\to\frac{\pm1}{\ln 1}\Rightarrow\nexists f(\pm1)$$

Continuidad en $x=0$**:** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\ln|x|}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\ln x}\to\dfrac{0^+}{-\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{\ln(-x)}\to\dfrac{0^-}{-\infty}=0\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$, es continua.

Derivabilidad en $x=0$: $f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{h}{\ln|h|}-0}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{\ln|h|}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{1}{\ln h}\to\dfrac{1}{-\infty}=0\\ \lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{1}{\ln(-h)}\to\dfrac{1}{-\infty}=0\end{cases}$ la función en el punto $x=0$ es derivable con $f'(0)=0$

De forma **alternativa** se estudia la continuidad de la función derivada en $x=0$ (**a partir de resultados del apartado c)**) y se concluye que es derivable con $f'(0)=0$:

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\overset{\frac{-\infty}{\infty}\text{ L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{2\ln x\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2\ln x}=0,\ \lim_{x\to0^-}f'(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(-x)-1}{\ln^2(-x)}=0$$

b) **Simetrías**: $f(-x)=\dfrac{-x}{\ln|-x|}=-\dfrac{x}{\ln|x|}=-f(x)$, función impar, gráfica simétrica respecto origen.

Asíntotas verticales: la función presenta asíntotas verticales en $x=\pm1$, se estudia solo $x=1$

$$\lim_{x\to1}\frac{x}{\ln x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{\ln x}\to\dfrac{1}{0^+}\to\infty\\ \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{\ln x}\to\dfrac{1}{0^-}\to-\infty\end{cases}\text{, por simetría }\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty\end{cases}$$

Asíntotas horizontales y oblicuas: dada la simetría de la función se estudia solo $x>0$

- Horizontales $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln x}\to\dfrac{\infty}{\infty}\overset{\text{L'Hôpital}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=\infty$, no tiene asíntotas horizontales, por simetría $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$
- Oblicuas $y=mx+n$, $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x}{\ln x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$, no tiene asíntotas oblicuas.

c) Se calcula la **primera derivada** para $x > 0$, $x \neq 1$:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\ln x - \frac{x}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}, \left.\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}\right\}$$

Los puntos críticos de la función para $x > 0$, $x \neq 1$ son:

- $f'(x) = 0, x > 0 \Rightarrow \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow x = e$

Criterio de la primera derivada: el signo de la derivada determina el crecimiento de la función.

- $x \in (0,1) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece
- $x \in (1,e) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece
- $x \in (e,\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece

Teniendo en cuenta la simetría respecto del origen:

- $f(x)$ crece para $x \in (-\infty,-e) \cup (e,\infty)$
- $f(x)$ decrece para $x \in (-e,-1) \cup (-1,1) \cup (1,e)$

Extremos relativos: está definida la función, es continua y cambia el crecimiento.

- $f(-e) = -e$, máximo relativo
- $f(e) = e$, mínimo relativo.

d) Se calcula la **derivada segunda** para $x > 0$, $x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \Rightarrow f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1)\, 2\ln x \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1)\, 2\ln x \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}, \left.\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}\right\}$$

$$f''(x) = 0, \left.\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x = e^2$$

Criterio de la segunda derivada, el signo de $f''(x)$ determina la concavidad de la función:

- $x \in (0,1) \Rightarrow f''(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} \to \dfrac{>0}{<0} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ cóncava hacia abajo
- $x \in (1,e^2) \Rightarrow f''(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} \to \dfrac{>0}{>0} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ cóncava hacia arriba
- $x \in (e^2,\infty) \Rightarrow f''(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} \to \dfrac{<0}{>0} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ cóncava hacia abajo

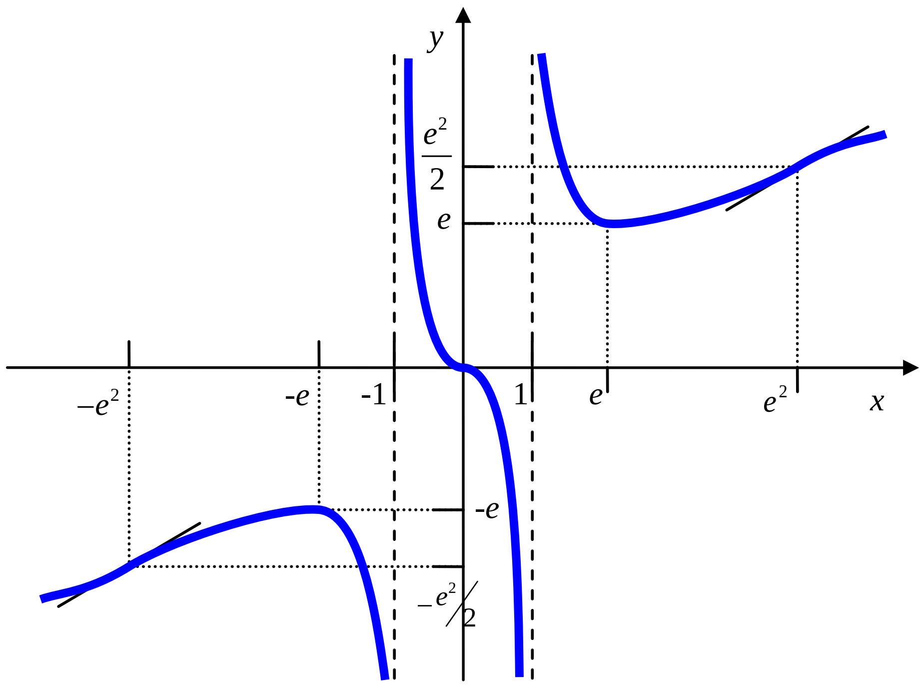
Teniendo en cuenta la simetría respecto del origen:

- $f(x)$ cóncava hacia arriba para $x \in (-\infty,-e^2) \cup (-1,0) \cup (1,e^2)$
- $f(x)$ cóncava hacia abajo para $x \in (-e^2,-1) \cup (0,1) \cup (e^2,\infty)$

Puntos de inflexión: está definida la función, es continua y cambia la concavidad.

- $x = \pm e^2 \Rightarrow f(\pm e^2) = \pm\dfrac{e^2}{2} \Rightarrow f'(\pm e^2) = \dfrac{1}{4}$
- $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

e) Gráfica de la función



f) Aproximación lineal de la función centrada en $x_0 = e^2$:

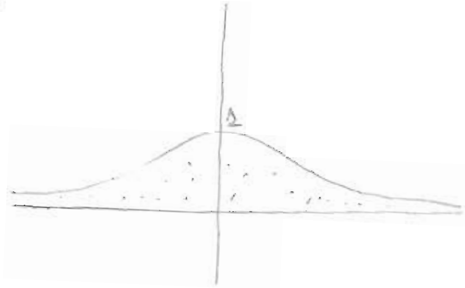
$$L(x) = f(e^2) + f'(e^2)(x - e^2)$$

$$L(x) = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{4}(x - e^2)$$

$$f(5) \cong L(5) = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{4}(5 - e^2) = \frac{e^2 + 5}{4}$$

PROBLEMA 3

(a)



$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$f(x)$ par

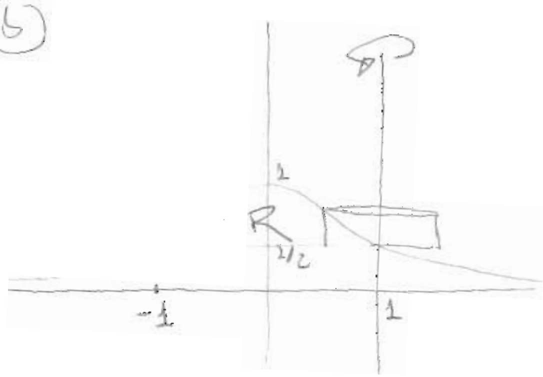
$f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ decreciente $\forall x \in [0,+\infty)$

$x=0$ Máx

$f(0) = 1$

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \underset{\text{simetría}}{=} 2\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg})\Big|_0^b = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

(b)



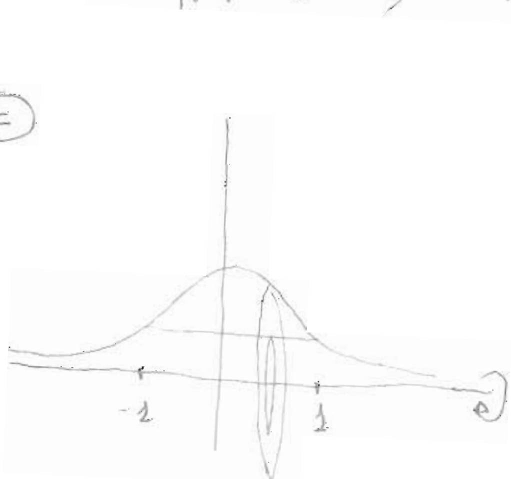
POR TUBOS

$$V = 2\pi \int_{-1}^{1} \underbrace{(1-x)}_{\text{RADIO}} \underbrace{\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right)}_{\text{ALTURA}} dx =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} - \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}x\right) dx = 2\pi\left[\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1} =$$

$$= 2\pi\left(\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}\ln 2} + \cancel{\frac{1}{4}}\right) - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}\ln 2} + \cancel{\frac{1}{4}}\right)\right) = 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi^2 - 2\pi$$

(c)



POR DISCOS

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) dx$$

4º Problema CÁLCULO I

Teorema de Rolle.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

1 - f es continua en $[a,b]$

2 - f es derivable en (a,b)

3 - $f(a) = f(b)$

Entonces $\exists$, al menos un $c \in (a,b)$, tal que $f'(c) = 0$.

$$F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}\, dt$$

$g(t) = e^{t^2} \to$ continua $\forall t \in \mathbb{R}$.

$h(x) = \operatorname{sen} x \to$ derivable y con derivada continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

Entonces por el teorema fundamental del cálculo integral $\exists F'(x)$ es continua y vale.

$$F'(x) = \cos x \, e^{\operatorname{sen}^2 x} \quad \text{en } [0,\pi]$$

es decir verifica 1 y 2.

$$F(0) = \int_0^0 e^{t^2} dt = 0 \qquad F(0) = F(\pi) \quad \text{3 condición}$$

$$F(\pi) = \int_0^0 e^{t^2} dt = 0$$

Por tanto $\exists c \in (0,\pi) \;/\; F'(c) = 0$

b) La función $F(x)$ no tiene inversa en $[0,\pi]$ ya que $F'(x) < 0 \quad x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

$$F'(x) > 0 \quad x \in [0, \tfrac{\pi}{2})$$

es decir no es monótona $\Rightarrow \nexists F^{-1}$ en $[0,\pi]$