CÁLCULO I

ENUNCIADOS DE EJERCICIOS DE CÁLCULO I

Profs.: P. Plaza Menéndez (Coordinador)
F. J. Barbas González
E. Palma Villalón
Mª. D. Pérez Vázquez
J. de Vicente Buendía

(Septiembre 2009)

Impresión: Septiembre 2009

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

CURSO 2008/2009

CÁLCULO I

PROGRAMA

1. Conjuntos numéricos.
2. Cálculo diferencial.
3. Cálculo integral.
4. Ecuaciones diferenciales ordinarias.

BIBLIOGRAFÍA PRINCIPAL

STEWART, J.: CÁLCULO de una variable (4ª edición) Editorial Thomson Learning.

BIBLOGRAFÍA DE CONSULTA

- SMITH, R.T. y MINTON, R.B. : CÁLCULO. Volumen 1. (2ª edición) Mc Graw Hill
- LARSON, R.E.; HOSTETLER, R.P. Y EDWARDS, B.H.: CÁLCULO I. (7ª edición) Editorial Pirámide
- DE BURGOS, J.: CÁLCULO INFINITESIMAL DE UNA VARIABLE. Mc Graw Hill.
- KITCHEN, J.W.: CÁLCULO. Mc Graw Hill.
- Tema 4: DENIS G. ZILL: Ecuaciones diferenciales con aplciaciones de modelado. Editorial Thomson Learning.

MAXIMA es un sistema libre de cálculo simbólico y numérico que te puedes descargar en la página:

http://sourceforge.net/project/platformdownload.php?group_id=4933

Para información sobre su instalación y configuración:
http://members3.jcom.home.ne.jp/imaxima

TEMA 1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

1.1 Los números reales.

- Los números reales, propiedades y representación. La recta real.
- Conjunto de números reales: intervalos.
- Valor absoluto. Propiedades.

1.2 Los números complejos.

- Definición de un número complejo. Representación: el plano complejo.
- Propiedades algebraicas. Interpretación geométrica.
- Conjugado de los números complejos. Módulo y argumento.
- Forma polar y trigonométrica. Forma exponencial: fórmula de Euler.
- Las operaciones elementales en las diferentes representaciones de los números complejos.
- Potencias. Fórmula De Moivre.
- Raíces.
- Polinomios complejos. Teorema fundamental del álgebra.

Bibliografía complementaria

- Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable.

  Alfonsa García y otros

- Cálculo diferencial e integral. N. Piskunov

PROBLEMAS

1- Demuestra que los siguientes números son racionales:

a) $16,42$ b) $4,\widehat{32}$ c) $25,2\widehat{263}$

2.- Demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

3.- Resolver las desigualdades siguientes:

a) $3x + 2 < 11$ b) $2x - 3 < 8$ c) $4 - 3x < 6$

d) $4 \leq x + 1 < 7$ e) $-2 < 2 - 2x < 3$ f) $x^2 + 3x - 4 > 0$

g) $x^2 - x - 6 < 0$ h) $3x^2 + 4 > 0$ i) $|x - 3| < 4$

j) $|3 - x| < 1$ k) $|2x + 1| > 2$ l) $\dfrac{x+2}{x-2} > 0$

m) $\dfrac{x^2 - x - 2}{(x+4)^2} > 0$ n) $\dfrac{-8x}{(x+1)^3} < 0$ ñ) $|x - 1| + |x - 2| > 1$

o) $|x - 1| - |x + 1| < 2$ p) $|5 - \dfrac{1}{x}| < 1$

4.- Expresar en forma exponencial los complejos siguientes:

a) $z = \sqrt{3} - i$ b) $z = -\sqrt{2} - i$ c) $z = -3$

d) $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2 + 2i}$ e) $z = \dfrac{-11 + 11i}{i}$ f) $z = \dfrac{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{i - \sqrt{3}}$

5.- Expresar en forma polar y exponencial los siguientes números complejos:

a) $1 + i$ b) $-1 + i$ c) $1 - i$ d) $-1 - i$ e) $3 + 3i$ f) $4i$

6.- Expresar en forma binómica los números complejos cuya forma módulo-argumental es:

a) $\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$ b) $\left(\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

7.- Calcular: a) $(1 + 4i)^3$ b) $(1 + i)^4$

8.- Identificar, en cada caso, los números complejos z que verifican:

a) $\bar{\mathrm{z}} = \dfrac{1}{\mathrm{z}}$ b) $|\mathrm{z}-\mathrm{a}| = |\mathrm{z}-\mathrm{b}|$ con $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{C}$ c) $|\mathrm{z}-1-\mathrm{i}| < 2$

d) $\mathrm{Re}(\mathrm{z}) = 3$ e) $|\mathrm{z}-1| = 2$ f) $|\mathrm{z}-\mathrm{i}| = 1$

g) $\mathrm{Arg}(\mathrm{z}-1) = \dfrac{\pi}{4}$ h) $\mathrm{Im}(\mathrm{z}^2) = 2$ i) $\mathrm{Arg}(\mathrm{z}+\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4}$

j) $|\mathrm{z}-1| + |\mathrm{z}-2| > 3$ k) $|\mathrm{z}-1| - |\mathrm{z}+1| < 1$ l) $|1 - \dfrac{1}{\mathrm{z}}| < 1$

9.- Sea el número complejo $z = \dfrac{3-2ai}{4-3i}$ Determinar a para que se verifique:

a) que z es un número imaginario puro

b) z un número real

c) el afijo de z está sobre la bisectriz del primer cuadrante.

10.- Resolver el sistema: $\begin{cases} iz = \bar{z} \\ z\bar{z} = 1 \end{cases}$ y dar las soluciones z_1 y z_2 en formas trigonométrica y exponencial. Calcular $\dfrac{1}{z_1}, \dfrac{1}{z_2}$ y la suma: $z_1 + \dfrac{1}{z_1} + z_2 + \dfrac{1}{z_2}$

11.- Consideramos la expresión: $w = f(z) = \dfrac{iz^2}{\bar{z}}$.

1) a) Calcular $f(i)$ b) Calcular $f(2-3i)$ en forma binómica.

2) Supuesto $z = [r, \theta]$. Calcular el módulo y el argumento de w ¿Cómo deberíamos elegir θ para que w sea real?

12.- Resolver en $\mathbb{C}$ las ecuaciones:

a) $z^3 - 8 = 0$ b) $64z^3 + 27 = 0$

13.- Encontrar tres números a, b, c complejos, tales que la ecuación $az^2 + bz + c = 0$ admita $1 + 2i$ y $3 - 5i$ como soluciones.

14.- a) Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación: $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

b) Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación: $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$

15.- Resolver la ecuación $(z^2 + 4)(z^2 - 2z + 5) = 0$ y representar las soluciones en el plano complejo. ¿Cómo es el cuadrilátero obtenido?

16.- 1)Resolver, para $z \in \mathbb{C}$, la ecuación $z^3 - 7z^2 + 17z - 15 = 0$ sabiendo que esta ecuación tiene una raíz igual a 3.

2) Designamos por M,N,P los afijos de las raíces de la ecuación anterior. Demostrar que el triángulo MNP es un triángulo rectángulo e isósceles.

17.- Sean $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ y $z_2 = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$. Se pide:

a) Escribir todas las posibles representaciones de estos números complejos.

b) Dar z_1^5 y z_2^8 también de todas las formas posibles.

c) Calcular el valor $z = \frac{z_1^5}{z_2^8}$ en forma polar y algebraica.

d) Deducir los valores exactos de $\cos\frac{\pi}{12}$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ y comprobar que son los mismos si utilizamos las relaciones trigonométricas y los valores de las razones de los ángulos $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{4}$.

18.- Utilizar la fórmula de Moivre para demostrar que:

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$$

TEMA 2 CÁLCULO DIFERENCIAL

2.1 Derivada de una función: definición, interpretación y propiedades. Aproximación lineal.

2.2 Función derivada. Derivación implícita. Función inversa. Derivadas sucesivas.

2.3 Funciones derivables en intervalos: teoremas de valor medio.

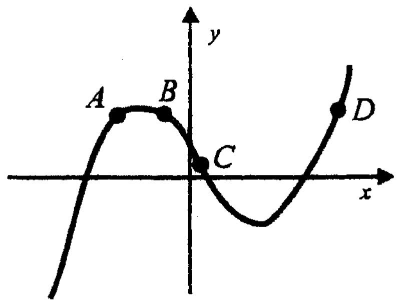
2.4 Estudio local de la gráfica de una función. Posición de una curva respecto de su tangente. Problemas de optimización.

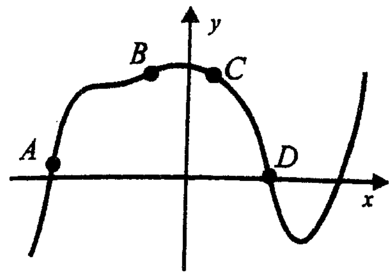
2.5 Aproximación local. Polinomio de Taylor. Teorema de Taylor. Aplicaciones: Cálculo de límites, errores, análisis de los valores máximos y mínimos mediante la fórmula de Taylor.

NOTA. Algunos ejercicios de este tema están recogidos en el libro referido en la bibliografía principal: Cálculo I. R.T. Smith y R.B. Minton

PROBLEMAS

1.- Hacer una lista de los puntos A, B, C y D ordenándolos de menor a mayor según la pendiente de la recta tangente.

a) 

b) 

2.-Hallar la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$ usando las definiciones (equivalentes):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{a}} \frac{\mathrm{f(x) - f(a)}}{\mathrm{x - a}}$$

a) $f(x) = x^2 - 1,\ a = 0$

b) $f(x) = x^4 + x,\ a = -1$

3.- Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$. Hacer la gráfica de $y = f(x)$ y de la recta tangente para verificar que tiene la ecuación correcta.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x+1},\ a = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1},\ a = 1$

4.- Determinar si la recta tangente a $y = f(x)$ existe o no en $x = a$. Si existe, calcularla; si no existe, explicar por qué.

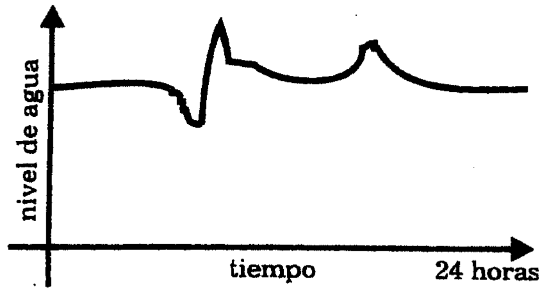
a) $f(x) = |x - 1|$ en $a = 1$

b) $f(x) = \dfrac{4x}{x-1}$ en $a = 1$

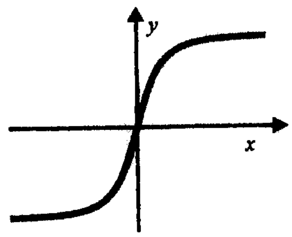
c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^3 + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ en $a = 0$

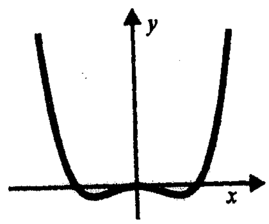
d) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ en $a = 0$

5.- La gráfica que aparece a continuación muestra la cantidad de agua que contiene un tanque en una ciudad, como función del tiempo. a)¿Cuándo contuvo más agua el tanque? b)¿Cuándo estuvo más vacio? c)¿Cuándo la razón a la que se estaba llenando fue la mayor? d)¿Cuándo la razón a la que se estaba llenando fue la menor? e)¿Qué parte del día crees que representa la porción de la gráfica que está al mismo nivel?

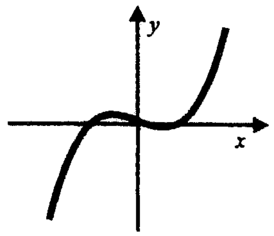


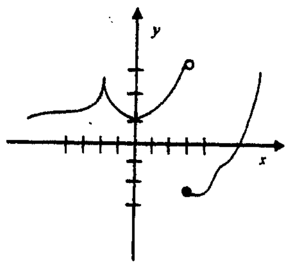
6.- Utilizar la gráfica dada de $f(x)$ para dibujar la gráfica de $f'(x)$.

a) 

b) 

7.- Utilizar la gráfica dada de $f'(x)$ para dibujar una posible gráfica de $f(x)$ en el apartado a) y decir los puntos en los que no es derivable la función del apartado b).

a) 

b) 

8.- Si $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$, mostrar gráfica y numéricamente que $f(x)$ es continua en $x = 0$, pero $f'(0)$ no existe.

9.- Sea $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x < 0 \\ k(x) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$. Si $f(x)$ es continua en $x = 0$, y $g(x)$, $k(x)$ son derivables en $x = 0$, demostrar que $D_+ f(0) = k'(0)$ y $D_- f(0) = g'(0)$. ¿Qué afirmación no es verdadera si $f(x)$ tiene un salto de discontinuidad en $x = 0$?

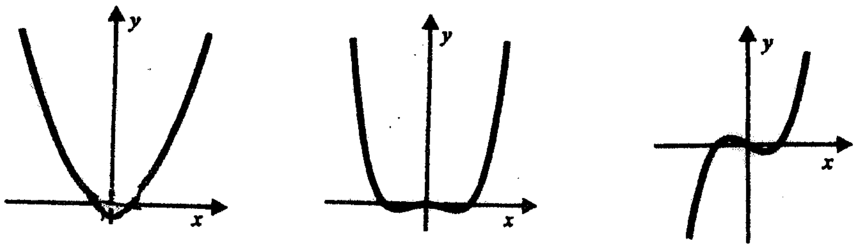
10.- Un modelo para el crecimiento de la población urbana es el siguiente: al principio la población urbana crece muy rápidamente, luego la razón de crecimiento disminuye hasta que la población comienza a decrecer. Si $P(t)$ es la población en el tiempo t, dibujar una gráfica que incluya $P(t)$ y $P'(t)$.

11.- Determinar si lo que sigue es verdadero siempre; si $f(0) = 0$, $f'(x)$ existe para todo x y $f(x) \leq x$, entonces $f'(x) \leq 1$.

12 .- Determinar el valor o valores de x para los cuales la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ no existe. Hacer la gráfica de la función y determinar el significado gráfico de cada punto.

a) $f(x) = x^{2/3}$ b) $f(x) = x^{1/3}$

13.- Una curva representa una función $f(x)$ y las otras dos representan $f'(x)$ y $f''(x)$. Determinar cuál es cuál.



14.- La función dada representa la altura de un objeto. a) Calcular la velocidad y la aceleración en el tiempo $t = a$. b) ¿El objeto está subiendo o bajando? c) ¿El objeto está aumentando su rapidez o disminuyéndola?

a) $h(t) = -16t^2 + 40t + 5, \ a = 2$

b) $h(t) = 10t^2 - 24t, \ a = 1$

15.- A una altura de 2 km, un avión cruza a una distancia de 10 km de un aeropuerto. Si el aeropuerto está en el punto (0,0), el punto de partida del avión para el descenso al aeropuerto es (10,2). a) Hacer un dibujo de una trayectoria $y = f(x)$, que represente razonablemente la situación descrita. b) Explicar que representa la derivada $f'(x)$. (Sugerencia: no es velocidad.)

c) Explicar por qué es importante y/o necesario tener $f(0) = 0, f(10) = 2, f'(0) = 0$ y $f'(10) = 0$. d) El polinomio más simple que puede cumplir con esos requisitos es un polinomio cúbico $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ (Observación: cuatro requisitos, cuatro constantes). Encontrar valores de las constantes a, b, c, d que se ajusten a la trayectoria del vuelo. (Sugerencia: tomar $f(0) = 0$ y luego $f'(0) = 0$). e) Dibujar la gráfica de la función resultante; ¿se ve bien? f) Supongamos que las regulaciones de la aerolínea prohíben una derivada de $2/10$ o mayor. ¿Por qué existirá tal regulación? g) Demostrar que la trayectoria hallada para el vuelo es ilegal. h) Argumentar que en efecto todas las trayectorias de vuelo que cumplan los cuatro requisitos son ilegales. Por consiguiente, el descenso debe comenzar a una distancia mayor de 10km. i) Hallar una trayectoria de vuelo que cumpla con todos los requisitos y cuyo descenso comience en 20 km.

16.- Escribir la regla del producto para la función $f(x)g(x)h(x)$. (Sugerencia: agrupar los dos primeros factores). Describir la regla general del producto: para n funciones, ¿cuál es la derivada del producto $f_1(x)f_2(x)f_3(x)\cdots f_n(x)$? ¿Cuántos términos hay? ¿Qué forma tiene cada término?

17.- Usar la regla del cociente para mostrar que la derivada de $(g(x))^{-1}$ es $-g'(x)(g(x))^{-2}$. Usar luego la regla del producto para calcular la derivada de $f(x)(g(x))^{-1}$.

18.- Supongamos que $F(x) = f(x).g(x)$ para las funciones infinitamente derivables $f(x), g(x)$. Comparar $F''(x)$ con la fórmula binomial para $(a+b)^2$. Calcular $F'''(x)$ y comparar $F'''(x)$ con la fórmula para $(a+b)^3$, entonces: dado que $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, escribir una fórmula para $F^{(4)}(x)$. Mostrar que $F''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$.

19.- Hallar la derivada $y'(x)$ implícitamente.

a) $\sqrt{xy} - 4y^2 = 12$ b) $xe^y - 3y\text{senx} = 1$

c) $\sqrt{x+y} - 4x^2 = y$ d) $e^{4y} - \text{lny} = 2\text{x}$

20.- Hallar la aproximación lineal en $x = 0$ para mostrar que las siguientes aproximaciones, comúnmente usadas valen para x "pequeños". Comparar los valores aproximados y exactos para $x = 0.01,\ x = 0.1,\ x = 1$ radianes.

a) $\tan x \approx x$

b) $\sqrt{4+x} \approx 2 + \dfrac{1}{4}x$

c) $e^x \approx 1+x$

21.- Hallar una ecuación de la recta tangente a la curva $x^3y^2 = -3xy$ en el punto $(-1,-3)$

22.- Comprobar que:

a) $(\cosh x)'$ =senh$x$ b) (senh$x$)'=cosh$x$

c) argch x =$\ln(x+\sqrt{x^2-1})x \geq 1$

d) argth$x$ = $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

23.- Razonar brevemente la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) cosh$x$ + senh $x = e^x$

b) sen $h2x$ = 2senh x cosh x

c) argsh x =$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \quad -\infty < x < \infty$

24.- Hallar la derivada y simplificar.

a) y =argsh$x$

b) y =argth$x$

c) $y = \ln(1-x^2)$

d) y =arg cos h(sen hx)

25.- Dada la función $f(x) = (x-1) - \text{sen}(x-1)$. a) Estudiar si existe la función $f^{-1}(x)$ b) ¿Cúal es el dominio de $f^{-1}(x)$? c) Hallar la recta tangente a la función $f^{-1}(x)$ en el punto $(\pi, \pi+1)$.

26.- Sean $f(x) = \text{sen}\, x^2$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$

a) Estudiar la continuidad de $f \circ g$ indicando cúal es su dominio.

b) Enunciar las condiciones suficientes para aplicar la regla de la cadena a la función $f \circ g$.

c) Calcular la derivada de $(f \circ g)(x)$ aplicando la regla de la cadena en el intervalo en el que se verifican las condiciones del teorema anterior. ¿Existe $(f \circ g)'(\pi+1)$? ¿Es contradictorio este resultado?

d) Sea $h(x) = (g \circ f)(x)$ definida $\forall x \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$. Decidir si existe $h^{-1}(x)$ y dar su dominio. Justificar la respuesta.

e) Sin hallar la forma explícita de $h^{-1}(x)$ calcular $[h^{-1}(x)]'$ con $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

27.- Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| > 1 \\ ax^2 + b & \text{si} \quad |x| \leq 1 \end{cases}$. Hallar a y b para que $f(x)$ sea derivable $\forall x \neq 0$.

28.- Dada la función $f(x) = x^2 - 6\ln(2-x)$

a) Calcular los intervalos de crecimiento, extremos relativos, extremos absolutos, y puntos de inflexión, si los hubiera.

b) Determinar el intervalo máximo que contenga a $x = 1$ donde exista $f^{-1}(x)$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f^{-1}(x)$ en el punto (-ln 64,0).

29.- En los apartados siguientes explicar por qué no es válido usar el teorema del valor medio. Hallar el valor de c cuando sea posible.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $[-1,1]$ b) $f(x) = x^{1/3}$, $[-1,1]$

30.- Constatar las hipótesis del Teorema de Rolle y del teorema de valor medio y hallar un valor de c para el cual la conclusión apropiada sea verdadera. Ilustrar la conclusión con una gráfica.

a) $f(x) = x^2 + 1$, $[0,2]$ b) $f(x) = x^3 + x^2$, $[-1,1]$ c) $f(x) = \text{sen}x$, $[-\pi, 0]$

31.- Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} (x-1) + \cos(x-1) & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{\text{sen}(x-1)}{x-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) Determinar en qué puntos $f(x)$ es continua y derivable.

b) ¿Cumple $f(x)$ en $[0,2]$ las condiciones de teorema de Rolle?

32.- Si $f'(x) < 0$ para todo x, demostrar que $f(x)$ es una función decreciente, es decir, si $a < b$, entonces $f(a) > f(b)$.

33.- Demostrar que $x^3 + 4x - 3 = 0$ tiene exactamente una solución.

34.- Demostrar que $x^4 + 6x^2 - 1 = 0$ tiene exactamente dos soluciones.

35.- Demostrar que un polinomio de tercer grado (cúbico) tiene como máximo tres ceros (puede usar la fórmula cuadrática). Demostrar que un polinomio de grado n tiene como máximo n ceros.

36.- Discutir cuántas soluciones $x \in \mathbb{R}$ tiene la ecuación $e^x = ax$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R} (a > 0)$.

37.- a) Demostrar que para números reales cualesquiera $x, y, |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.

b) Utilizar el teorema del valor medio para derivadas (Teorema de Lagrange) para deducir que:

$$|\mathrm{Lnx} - \mathrm{Lny}| \geq |\mathrm{x} - \mathrm{y}|, \quad \forall \mathrm{x} \in (0,1), \quad \forall \mathrm{y} \in (0,1)$$

c) Demostrar que $2 \operatorname{sen} x + 3x + \mathrm{tgx} \geq 0, \quad \forall \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

38.- Sea $f(x)$ una función derivable tal que $f(0) = f'(0) = 0$. Demostrar con un ejemplo que no es necesariamente cierto que $f(x) = 0$ para todo x. Hallar el error en la siguiente falsa "demostración". Usando el teorema del valor medio con $a = x$ y $b = 0$, se tiene, $f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Como $f(0) = 0$ y $f'(c) = 0$, se tiene $0 = \frac{f(x)}{x}$, por tanto, $f(x) = 0$.

39.- Presentar un argumento gráfico para sustentar que si $f(a) = g(a)$ y $f'(x) > g'(x)$ para todo $x > a$, entonces $f(x) > g(x)$ para todo $x > a$. Usar el teorema del valor medio para probarlo.

Usando el resultado anterior verificar las desigualdades siguientes:

a) $2\sqrt{x} > 3 - 1/x$ para $x > 1$ b) $e^x > x + 1$ para $x > 0$ c) $x - 1 > \ln x$ para $x > 1$

40.- Halla los límites indicados.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$ f) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x}$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ i) $\lim\limits_{x \to \infty} x \operatorname{sen}(1/x)$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos x - 1}$ k) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ l) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\cos x)^{1/x}$

41.- Dibujar una gráfica de una función $f(x)$ tal que:

a) El máximo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[-2,2]$ es igual a 3 y el mínimo absoluto no existe.

b) $f(x)$ es continua, el máximo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $(-2,2)$ no existe y el mínimo absoluto es igual a 2.

c) $f(x)$ es una función continua tal que su máximo absoluto en el intervalo (-2,2) es igual a 4 y el mínimo absoluto es igual a 2.

42.- Dibujar una gráfica en donde se muestre que $y = f(x) = x^2 + 1$ y $y = g(x) = \ln x$ no se intersecan. Encontrar x para minimizar $f(x) - g(x)$. En este valor de x, demostrar que las rectas tangentes a $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son paralelas.

Explicar gráficamente por qué tiene sentido que las rectas tangentes del apartado anterior sean paralelas, dado que en este punto las gráficas se acercan entre sí.

43.- La relación entre la presión, P, el volumen, V, y la temperatura, T, de un gas o de un líquido está dada por la ecuación de van de Waal $\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$ para constantes positivas a, b, n, R. Resolver la ecuación con respecto a P. Tratando a T como constante y a V como variable, hallar el punto crítico (T_c, P_c, V_c) tal que $P'(V) = P''(V) = 0$. Para temperaturas superiores a T_c, la sustancia puede existir solamente en su forma gaseosa; por debajo de T_c, la sustancia es un gas o un líquido (dependiendo de la presión y el volumen). Para el agua, tome $R = 0.08206$-atm/mo:K, $a = 5.464$ l^2-atm/mo^2, y, $b = 0.03049$ l/mo. Hallar la mayor temperatura a la cual $n = 1$ mo de agua puede existir como líquido. (Nota: la respuesta debe estar en grados Kelvin).

44.- El movimiento de un resorte está dado por $f(t) = e^{-t}\,\text{sen}t$. a) Calcular la velocidad en el instante t. b) Dibujar la gráfica de la función velocidad. c) ¿Cuándo la velocidad es cero? d) ¿Cuál es la posición del resorte cuando la velocidad es cero? e) ¿Cuándo la velocidad alcanza un valor máximo o mínimo? f) ¿Cuál es la posición del resorte cuando la velocidad alcanza un máximo o un mínimo? describir el movimiento del resorte.

45.- En los ejercicios siguientes, encontrar los extremos absolutos de cada función en el intervalo dado.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1,\ [0, 2]$ b) $f(x) = x - 2\cos x,\ [-\pi, \pi]$

c) $f(x) = x^{2/3},\ [-4, -2]$ d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2},\ [-4, 0]$

e) $f(x) = \text{senx} + \cos \text{x},\ [0, 2\pi]$

Y repetir los apartados, pero en lugar de hallar los extremos en el intervalo cerrado, hallarlos en el intervalo abierto, en caso de que existan.

46.- Para los distintos apartados, dibujar una gráfica de una función con las propiedades dadas.

a) $f(0) = 1,\ f(2) = 5,\ f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $x > 2$, $f'(x) > 0$ para $0 < x < 2$.

b) $f(3) = 0,\ f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $x > 3$, $f'(x) > 0$ para $0 < x < 3$, $f'(3) = 0$, $f(0)$ y $f'(0)$ no existe.

47.- En los apartados siguientes, encontrar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, todos los extremos locales, los intervalos de concavidad, todos los puntos de inflexión y dibujar una gráfica.

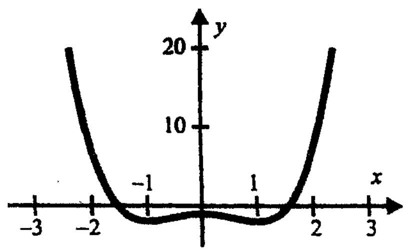
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ b) $f(x) = x + 1/x$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}e^x$ d) $f(x) = x^2/(x^2 - 9)$

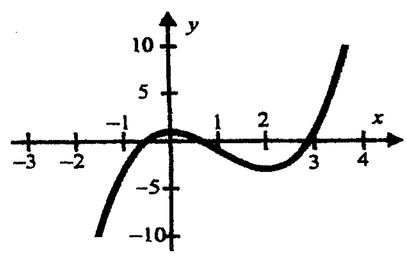
48.- Los investigadores en varios campos (que incluyen la biología de la población, la economía y el estudio de tumores en animales) utilizan la curva de crecimiento de Gompertz, $W(t) = ae^{-be^{-t}}$. Cuando $t \to \infty$ demostrar que $W(t) \to a$ y $W'(t) \to 0$. Hallar la razón máxima de crecimiento.

49.- En los apartados siguientes calcular los intervalos en donde la función es cóncava hacia arriba y en donde es cóncava hacia abajo. (Sugerencia: hacer una estimación acerca de dónde crece y dónde decrece la pendiente).

a)



b)



50.- En los ejercicios siguientes, dibujar una gráfica con las propiedades dadas.

a) $f(0) = 2$, $f'(x) > 0$ para todo x, $f'(0) = 1$, $f''(x) > 0$ para $x > 0$, $f''(0) = 0$.

b) $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$ para $x < -1$ y $-1 < x < 1$, $f'(x) < 0$ para $x > 1$, $f''(x) > 0$ para $x < -1$, $0 < x < 1$ y $x > 1$, $f''(x) < 0$ para $-1 < x < 0$.

c) $f(0) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ para $x < -1$ y $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 0$ y $x > 1$, $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y $x > 0$.

51.- Suponer que $w(t)$ es la profundidad del agua en un depósito de la ciudad. ¿Qué sería mejor como noticia en el tiempo $t = 0; w''(0) = 0.05$ o $w'(0) = -0.05$? ¿o sería necesario conocer el valor de $w''(0)$ para determinar cuál es mejor?

52.- Suponer que una compañía que gasta x miles de € en publicidad vende $s(x)$ € de mercancía, donde $s(x) = -3x^3 + 270x^2 - 3.600x + 18.000$. Hallar la inversión en publicidad que optimice las ventas.

53.- Mostrar que hay un punto de inflexión en (0,0) para cualquier función de la forma $f(x) = x^4 + cx^3$, donde c es una constante diferente de 0. ¿Qué papel(es) juega c en la gráfica de $y = f(x)$?

54.- En los apartados siguientes la "familia de funciones" contiene un parámetro c. El valor de c afecta a las propiedades de las funciones. Indicar las diferencias que se presentan para los distintos valores de c.

a) $f(x) = x^4 + cx^2$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + c^2}$

c) $f(x) = e^{-x^2/c}$

d) $f(x) = \text{sen}(cx)$

55.- En aplicaciones variadas, los investigadores modelan un fenómeno cuya gráfica comienza en el origen, sube hasta un máximo único y luego cae hacia una asíntota horizontal de $y = 0$. Por ejemplo, la función de densidad de probabilidad de eventos como el tiempo entre la concepción y el nacimiento de un animal, o la cantidad de tiempo de supervivencia después de contraer una enfermedad fatal, podrían tener estas propiedades. a) Mostrar que la familia de funciones

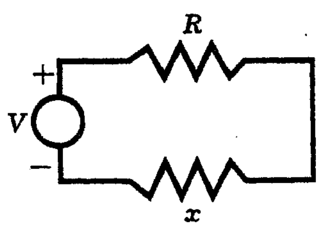
xe^{-bx} tiene estas propiedades para todas las constantes positivas b. b) ¿Qué efecto tiene b en la ubicación del máximo? c) En el caso del tiempo transcurrido desde la concepción, ¿qué representa b? d) En el caso del tiempo de supervivencia, ¿qué repesenta b?

56.- Demostrar que el rectángulo de área máxima para un perímetro dado P siempre es un cuadrado. Demostrar que el rectángulo de perímetro mínimo para un área dada A también es un cuadrado.

57.- Hallar el punto de la curva $y = x^2$ que esté más cercano al punto (0,1). Hallar la pendiente de la recta que pasa por el punto dado y por el punto más cercano a la curva dada. Demostrar en cada caso que esta recta es perpendicular a la recta tangente a la curva en el punto dado.

58.- Una ciudad quiere construir una nueva sección de autopista para conectar un puente existente con un enlace situado a 8 km al este y 10 km hacia el sur del puente. Los primeros 4 km al sur del puente son de tierra cenagosa. Suponer que la autopista cuesta 5 millones € por km sobre el terreno cenagoso y 2 millones € por km sobre tierra firme. La autopista debe construirse en línea recta desde el puente hasta el límite de la tierra cenagosa; luego, en línea recta hasta el enlace. ¿En qué punto debería emerger la autopista del terreno cenagoso para minimizar el coste total de la nueva autopista? Cuánto se ahorra con respecto a lo que se gastaría construyendo la nueva autopista en línea recta desde el puente hasta el enlace? (Sugerencia: usar triángulos semejantes para hallar el punto del límite correspondiente a una trayectoria recta y calcular su función de costo en ese punto).

59.- En un aparato electrónico, los circuitos individuales pueden servir para muchos propósitos. En algunos casos el flujo de electricidad debe controlarse reduciendo la potencia, en lugar de aumentarla. En el circuito que se muestra a continuación se dan un voltaje de V voltios y una resistencia de R ohmios. Se quiere determinar el tamaño del resistor restante (x ohmios). La potencia absorbida por la resistencia x es $p(x) = V^2x/(R+x)^2$. Hallar el valor de x que maximice la potencia absorbida.



60.- Si la concentración de una sustancia química cambia de acuerdo con la ecuación $x'(t) = 0.5x(t)[5-x(t)]$, hallar la concentración $x(t)$ para la cual la razón de reacción es máxima. Hallar la concentración máxima.

61.- Representar:

a) e^x b) e^{-x} c) $e^x + e^{-x}$ d) $e^x - e^{-x}$

62.- Dada la función $f(x) = xe^{-x^2}$. Hallar los valores máximos y mínimos de la función. ¿Son absolutos? ¿Es una función acotada?

63.- Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{|x|-1}$, se pide:

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$

b) Determinar los extremos relativos y puntos de inflexión, si existen.

c) Representar la función.

d) Si $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, hallar $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{e^2}\right)$

64.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Demostrar que $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ y que $f'(x)$ no está acotada en $[-1, 1]$.

65.- Sea $f(x) = \begin{cases} e^x & -\infty < x \leq 0 \\ ax+1 & 0 < x \leq 1 \\ \ln x + b & 1 < x \leq e \\ \dfrac{3e}{x} & e < x < \infty \end{cases}$ con a, b $\in \mathbb{R}$

a) Calcular los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua.

b) Para los valores de a y b calculados en el apartado anterior, estudiar la derivabilidad de $f(x)$.

c) Para dichos valores de a y b, hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ (Justificar la respuesta).

66.- Calcular el valor máximo de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$$

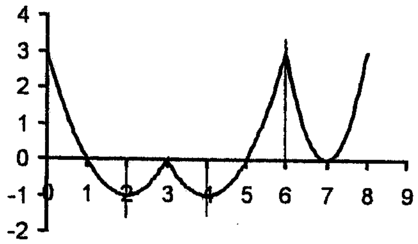
67.- Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}$. Hallar los máximos y mínimos absolutos y relativos.

68.- Dada la función $f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|}$ se pide:

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$. Representar la función.

b) Estudiar en qué intervalos $[a,b]$ sería posible aplicar el teorema de Rolle.

69.- Si la gráfica adjunta es la de la derivada de la función $y = f(x)$ ¿para qué valores de x la función $f(x)$ presenta máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión?



70.- Una compañía aérea dedicada al transporte de viajeros desea abrir una nueva línea entre Madrid y Tenerife. Para ello realiza un estudio de mercado sobre la posible aceptación de sus vuelos, encontrando que el beneficio acumulado vendría dado por la función $f(t) = 1 - \frac{4}{1+e^{t-1}}$, t en años.

a) Estudiar si la línea producirá beneficios desde el momento de su inauguración, y en caso contrario indicar desde qué instante es rentable.

b) ¿Crece el beneficio a lo largo del tiempo? ¿Está limitado este beneficio? ¿Cuál es el instante en que el crecimiento de beneficio es mayor?

71.- Dada la función $y = \frac{x}{e^x}$ se pide:

a) Expresión de su derivada n-ésima. Escribir el polinomio de McLaurin de la función y su término complementario.

b) Aproximar el valor de la función en $x = 0.2$ tomando tres términos del polinomio y estimar el error cometido.

c) Representar gráficamente todas las funciones implicadas.

72.- Los elementos aerodinámicos básicos necesarios para el cálculo de actuaciones de un avión son los coeficientes de sustentación C_L y de resitencia C_D. Considerando una polar del avión parabólica $C_D(C_L) = C_{D0} + KC_L^2$, seindo $C_{D0}, K > 0$ constantes, se pide:

a) Representar la polar del avión $C_D(C_L)$ y calcular las tangentes desde el origen a la gráfica de la función.

b) Sean las funciones eficiencia aerodinámica $E(C_L) = \dfrac{C_L}{C_D}$ y eficiencia modificada $\tilde{E}(C_L) = \sqrt{C_L} \cdot E$. Calcular los extremos, puntos de inflexión y asíntotas si hubiere, así como la pendiente de la tangente en el origen.

c) Representar las funciones $E(C_L)$ y $\tilde{E}(C_L)$ sobre los mismos ejes coordenados.

73.- a) Usar los polinomios de McLaurin $P_1(x)$ y $P_3(x)$ correspondientes a $f(x) = \operatorname{sen} x$ para completar la tabla adjunta.

x	0	0.25	0.50	1
$\operatorname{sen} x$	0	0.2474	0.4794	0.8415
$P_1(x)$				
$P_3(x)$				

b) Representar $f(x)$, $P_1(x)$ y $P_3(x)$.

74 .- Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 centrado en 1 de:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = \ln x$

75.- Encontrar los 3 primeros términos no nulos del polinomio serie de MacLaurin de

a) $e^x \operatorname{sen} x$ b) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+x}$ c) $\cos x \ln(1+x)$ d) $\operatorname{tg} x$ e) $\operatorname{arctg} x$

76.- Con la ayuda de polinomios de McLaurin:

a) Calcular sen 1 con error menor que 0.0001.

b) Calcular el número "e" con error menor que 0.01.

c) Para qué valores de x es válida la aproximación $\operatorname{sen} x = x$, con error menor que 0.006x10^{-}3 en valor absoluto.

77.- a) Escribir la fórmula de Taylor para el caso $f(x) = \ln(1+x)$, para $n = 5$ y centrada en $c = 0$.

b) Utilizando el apartado anterior, encontrar un valor aproximado de $\ln(1.2)$ y dar una estimación del error cometido.

78.- a) Aproximar la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ mediante el polinomio de Taylor de grado 2 y centrado en $c = 8$.

b) Estudiar la precisión de esta aproximación cuando $7 \leq x \leq 9$.

79.- Aplicación del Polinomio de Taylor:

1) Expresar en potencias de $x - 1$ el polinomio:

$$p(x) = 5 - x + 2x^2 - x^3 + x^4$$

2) Utilizar un polinomio de Mac-Laurin del $\operatorname{sen} x$ para calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$$

3) Teniendo en cuenta los desarrollos limitados de Mac-Laurin de las funciones que intervienen, calcular los siguientes límites.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x \operatorname{sen} x + 2\cos x - 2}$

4) Sea f una función de clase n en $I \subset \mathbb{R}$, y sea $x_o \in I$. Razonar que si $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1}(x_0) = 0$ y $f^{(n}(x_0) \neq 0$ entonces:

a) si n es par $f(x_0)$ es un valor extremo de la función.

b) si n es impar existe en $(x_0, f(x_0))$ un punto de inflexión de la función.

5) Aplicar el resultado anterior para estudiar la naturaleza del punto (0,0), en las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = x^4$ c) $f(x) = -x^4$

6) Demostrar que $f(x) = x - \operatorname{tg} x$ es un infinitésimo en $x = 0$ equivalente a $g(x) = -\dfrac{1}{3}x^3$

TEMA 3 CÁLCULO INTEGRAL

3.1 Función primitiva. Integral indefinida.

3.2 Sumas de Riemann e integral definida. Propiedades.

3.3 Teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow. Teorema del valor medio para integrales.

3.4 Cálculo de primitivas. Método de sustitución. Integración por partes. Integración de algunas funciones racionales, trigonométricas e irracionales.

3.5 Aplicaciones del cálculo integral. Geométricas: áreas entre curvas, volúmenes, longitudes de arco. Otras aplicaciones.

3.6 Curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares. Cálculo de pendientes, áreas y longitudes de arco.

3.7 Integrales impropias.

NOTA. Algunos ejercicios de este tema están recogidos en el libro referido en la bibliografía principal: Cálculo I. R.T. Smith y R.B. Minton

PROBLEMAS

1.- Determine la función posición si la función aceleración es $a(t) = 3\,\mathrm{sen}\, t + 1$, la velocidad inicial es $v(0) = 0$ y la posición inicial es $s(0) = 4$.

2.- Se estima que dentro de x meses la población de un cierto pueblo está cambiando a un ritmo de $2 + 6\sqrt{x}$ personas por mes. La población actual es de 5.000. ¿Cuál será la población dentro de 9 meses?

3.- Demostrar las siguientes desigualdades:

$$\text{a)}\ \int_0^{\pi} \cos^8 \mathrm{x}\mathrm{dx} \leq \int_0^{\pi} \cos^6 \mathrm{x}\mathrm{dx} \qquad \text{b)}\ \frac{1}{17} \leq \int_1^2 \frac{\mathrm{dx}}{1+\mathrm{x}^4} \leq \frac{1}{2}$$

4.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$\text{a)}\ \mathrm{f(x)} = \int_1^{\mathrm{x}} \sqrt{1+\mathrm{t}^2+\mathrm{t}^4}\,\mathrm{dt} \qquad \text{b)}\ \int_0^{\mathrm{sen\,x}} \sqrt{1+\mathrm{t}^3}\,\mathrm{dt}$$

5.- Demostrar que la función $f(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$ es cóncava hacia arriba $\forall x > 1$.

6.- Probar que la función $F(x) = -1 + \displaystyle\int_0^x \left(1 + \mathrm{sen}^2\, t^2\right) dt$ se anula en un único punto y que éste se encuentra en el intervalo [0,1].

7.- Sean $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{x} < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq \mathrm{x} \leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < \mathrm{x} \leq 2 \\ 0 & \text{si } \mathrm{x} > 2 \end{cases}$ y $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Se pide:

a) Encontrar una expresión para $g(x)$ semejante a la de $f(x)$.

b) Dibujar las gráficas de f y de g.

c) Determinar dónde son derivables f y g.

8.- Un objeto se mueve de forma tal que su velocidad después de t minutos es $v(t) = 1+4t+3t^2$ metros por minuto. ¿Qué distancia recorre el objeto durante el tercer minuto?

9.- Calcular las siguientes primitivas:

a) $\int \frac{x-1}{x+1}dx$

b) $\int \left(2x^{-2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

c) $\int 5\mathrm{sec}^2\mathrm{xdx}$

d) $\int \frac{e^x}{e^x+3}dx$

e) $\int \frac{\cos x}{e^{\operatorname{sen} x}}dx$

f) $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{\sqrt{x}}dx$

g) $\int x \operatorname{sen}^2 x dx$

h) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{cosx}}dx$

i) $\int \mathrm{Ln}(\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+2)\mathrm{dx}$

j) $\int e^{-x}\operatorname{sen} x dx$

k) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx$

l) $\int \frac{\mathrm{Ln}(\mathrm{Lnx})}{x}dx$

m) $\int \frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx$

n) $\int \frac{1}{\sqrt{1+2x}+3}dx$

ñ) $\int \frac{dx}{1+e^x}$

o) $\int \frac{2x^2+3x+11}{x^3+x^2+3x-5}dx$

p) $\int \frac{dx}{x^3+x}$

q) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-7}dx$

r) $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$

s) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}dx$

t) $\int \frac{(\mathrm{lnx}+2)^2}{x}dx$

u) $\int \frac{dx}{2+\cos x+\operatorname{sen} x}$

v) $\int \cos x e^{\operatorname{sen} x}dx$

w) $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

x) $\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x-5}}dx$

y) $\int x\mathrm{Ln}(\mathrm{x}+1)\mathrm{dx}$

z) $\int \frac{xdx}{\mathrm{cosh}^2\mathrm{x}^2}$

aa) $\int 5x^2\mathrm{tgh}(\mathrm{x}^3+7)\mathrm{dx}$

ab) $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x dx$

ac) $\int \tan^3\mathrm{xsec}^4\mathrm{xdx}$

ad) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}dx$

ae) $\int \mathrm{arctgxdx}$

af) $\int \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}dx$

ag) $\int \sqrt{x^2+4}dx$

ah) $\int x\sqrt{x^2+4}dx$

ai) $\int \frac{3x^3+1}{x^3-x^2+x-1}$

10.- Según registros t horas después de la media noche la temperatura en el aeropuerto local es $f(t) = -0.3t^2 + 4t + 10$ grados ¿Cuál es la temperatura media en el aeropuerto entre 9:00 y 12:00 h.?.

11.- Durante varias semanas, el departamento de carreteras ha estado registrando la velocidad del tráfico que fluye por una cierta salida del centro de la ciudad. Los datos sugieren que entre la 1:00 y las 6:00 P.M. en un día normal de la semana, la velocidad del tráfico en la salida es aproximadamente de $v(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 40$ kilómetros por hora, donde t es el número de horas desde mediodía. Calcula la velocidad media del tráfico entre la 1:00 y las 6:00 P.M.

12.- Calcular el área de la región limitada por las curvas dadas en cada uno de los siguientes ejercicios:

a) $y = x^3 - 2x^2,\ y = x^2$ c) $y = 2\operatorname{sen} x,\ y = 4\cos x,\ x \in [0, 2\pi]$

b) $y = x^3,\ x = y^3$ d) $x^2 + y^2 = 9,\ (x-3)^2 + y^2 = 9$

13.- Supón que la tasa de natalidad en cierta población es $b(t) = 2e^{0.04t}$ millones de personas por año, y que la tasa de mortalidad en la misma población es $d(t) = 2e^{0.02t}$ millones de personas por año. Demuestra que $b(t) \geq d(t)$ para $t \geq 0$ y explica por qué el área entre las curvas representa el incremento de la población. Calcula el incremento de población para $0 \leq t \leq 10$.

14.- Halla el área de la región limitada por las curvas dadas. Selecciona la variable de integración, de modo que el área pueda escribirse como una sola integral.

a) $y = 2x (x > 0),\ y = 3 - x^2,\ x = 0$

b) $x = 3y,\ x = 2 + y^2$

15.- Dibujar la región plana cuya área está calculada mediante las integrales:

$$A = \int_0^1 \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(y-1)^2 \right) - \operatorname{arcsen} y \right) dy + \int_1^2 \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(y-1)^2 \right) - \frac{\pi}{2}(2-y) \right) dy$$

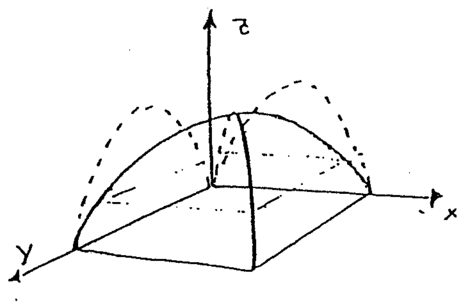
16.- El perímetro de una piscina es $y = \pm \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} + 1 \right)$ para $-3 \leq x \leq 3$ (todas las medidas están expresadas en metros). La profundidad de la piscina es $6 + 3\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}x\right)$. Elabora un dibujo de la piscina y plantea el volumen.

17.- La gran pirámide de Gizeh se levanta aproximadamente 170 metros sobre una base cuadrada de 250 metros de lado. Calcula el volumen.

18.- Una jarra de arcilla tiene secciones transversales circulares de radio $4 + \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$ centímetros para $0 \leq x \leq 2\pi$. Elabora un dibujo de la jarra y calcula el volumen.

19.- Calcula el volumen encerrado por la bóveda de la figura obtenida por la intersección de

2 cilindros rectos de directriz parabólica. El primero de los cilindros tiene por directriz la parábola $z = 6y - y^2$, y el segundo la parábola $z = 9x - \frac{9}{4}x^2$.



20.- Un abalorio de joyería se forma abriendo un agujero de $\frac{1}{2}$ cm en una esfera de 1 cm. Calcula el volumen que queda.

21.- La forma del montículo de un hormiguero se logra cuando la región limitada por $y = 1 - x^2$ y el eje x gira alrededor del eje y. Un investigador retira un núcleo cilíndrico del centro del montículo. ¿Cuánto debe medir el radio para que el investigador obtenga 10% de tierra?

22.- Supón que el triángulo cuyos vértices son (-1,-1), (0,1) y (1,-1) gira alrededor del eje y. Demuestra que el volumen del sólido resultante es $\frac{2}{3}\pi$.

23.- Calcular el volumen engendrado al girar el círculo $x^2 + (y-8)^2 = 4$, alrededor del eje OX (La figura obtenida es la llamada toro).

24.- Encontrar una curva de la familia de parábolas simétricas respecto al eje OY y con vértice en el punto (0,2) que verifica que el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje OY el área limitada por la parábola, la recta $x = 0$ y la tangente a la parábola en $x = 1$, vale $\pi\ u^3$.

25.- Sea R el área plana formada por los puntos interiores del triángulo de vértice: (-1,0),(0,1) y (2,0) y los puntos de la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y \geq x^2 - 1, y \leq 0\}$.

Plantear utilizando los métodos de *tubos* y de *discos*, las integrales necesarias para calcular el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar el área R en torno a la recta $x = 2$.

26.- Sea la función $f(x) = \text{máx}\left\{x^2, \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right\}$. Se pide:

a) Dibujar $f(x)$ y estudiar el dominio, la continuidad y derivabilidad.

b) Calcular el área acotada por la función y el eje de abscisas en el intervalo [-1,1].

c) Calcular el volumen engendrado al girar el área anterior en torno al eje de ordenadas.

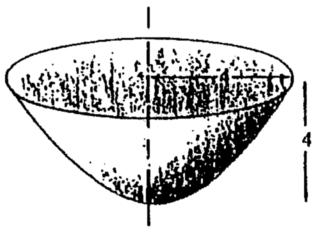
27.- Sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 2(y-1)^2 \wedge x - 1 \leq (y-1)^2\}$. Calcular el volumen del sólido generado al girar R en torno al eje de ordenadas.

28.- Calcula la longitud de un cable con forma de catenaria $f(x) = a\cosh(x/a)$ que cuelga de dos pilares iguales, de altura $\dfrac{e^2+1}{e}$ decámetros, separados 4 decámetros, y colocados a la misma altitud.

29.- Un cierto pozo de petróleo que produce 300 barriles de petróleo crudo al mes se secará en 3 años. Se estima que dentro de t meses el precio del petróleo crudo será de $P(t) = 18 + 0.3\sqrt{t}$ dólares por barril. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, ¿cuál será el ingreso futuro total del pozo?

30.- Entre ciertos límites, la fuerza necesaria para estirar (comprimir) un resorte es proporcional al alargamiento (acortamiento), en donde la constante de proporcionalidad se denomina constante de rigidez del resorte. Suponiendo que para producir en un resorte, cuya longitud natural es de 1 centímetro, un alargamiento de 2,5 milímetros se necesita aplicar una fuerza de 25 kilopondios, calcula el trabajo realizado para alargarlo desde 1 a 2 centímetros.

31.- Un tanque lleno de agua tiene la forma de un paraboloide de revolución como el de la figura (se obtiene al hacer girar una parábola alrededor de un eje vertical). Si la altura del tanque es de 4 metros y el radio de la parte superior es también de 4 metros, calcula el trabajo que se requiere para bombear el agua hacia afuera del tanque.



32.- Compara las gráficas de $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ y $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} 2t \end{cases}$

Emplea las identidades $\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$ y $\operatorname{sen} 2t = 2\cos t \operatorname{sen} t$ para hallar ecuaciones de la forma $y = f(x)$ para cada gráfica.

33.- Identifica todos los puntos en que la curva $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\operatorname{sen} t \end{cases}$ tiene una recta tangente horizontal y una recta tangente vertical.

34.- Halla la longitud de un arco de cicloide: $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

35.- Dibujar la gráfica de las siguientes curvas dadas en coordenadas polares:

a) $r = 2\operatorname{sen}\theta$ b) $r = 1 + \cos\theta$

c) $r = \operatorname{sen} 2\theta$ d) Espiral de Arquímedes: $r = a\theta$

e) $r = a\cos\theta$

36.- Halla la longitud de arco de la siguiente curva: $r = 2 - 2\operatorname{sen}\theta$

37.- Halla la pendiente de la recta tangente a la curva polar $r = \operatorname{sen} 3\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$ y en $\theta = 0$. Calcula el área de una hoja.

38.- Halla el área situada en el interior de $r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$ y en el exterior de $r = 2$.

39.- Si la curva polar $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$, encierra el área A, demuestre que para cualquier constante c, $r = cf(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$ encierra el área c^2A.

40.- Una vaca se encuentra atada a un punto de la valla de un prado circular de radio R, mediante una cuerda de longitud $l = \sqrt{2}R$. Calcular la superficie del prado a la que la vaca no puede acceder.

41.- Sean $r = 2\text{sen}\theta$ y $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$, las ecuaciones de dos circunferencias que pasan por el polo. Se pide:

a) Representarlas gráficamente.

b) Calcular el área común.

42.- Dibujar la región del plano cuya área está calculada mediante la siguiente integral expresada en coordenadas polares.

$$\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4}((3\operatorname{sen}\theta)^2 - (1+\operatorname{sen}\theta)^2)d\theta$$

43.- Sea la región

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/(x-1)^2 + y^2 \leq 1;\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

a) Calcular en coordenadas polares el área de R.

b) Plantear las integrales necesarias, por el método de discos, para hallar el volumen del sólido de revolución engendrado cuando R gira alrededor del eje $x = 1$.

44.- Sea la región $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2 \leq 2y;\ x^2 + y^2 \leq 8\}$

a) Calcular mediante integrales en coordenadas polares el área de R.

b) Calcular el volumen de revolución obtenido al girar R alrededor del eje $y = -6$.

c) Calcular el volumen de un sólido de base R, donde las secciones perpendiculares al eje OX, son semicírculos cuyos diámetros están situados en la base del sólido.

45.- Determinar el carácter de las siguientes integrales y evaluar las que sean convergentes:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} xe^{2x}dx$ d) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$

b) $\displaystyle\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ e) $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt[3]{x-9}}dx$ f) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx$

46.- Sea la región plana $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq y \leq e^{1-x}, x \geq -1\right\}$. Plantear las integrales, utilizando los métodos de tubos y discos, que calculan el volumen engendrado cuando el área A gira alrededor del eje $x = -1$. Calcular el volumen por uno de estos métodos.

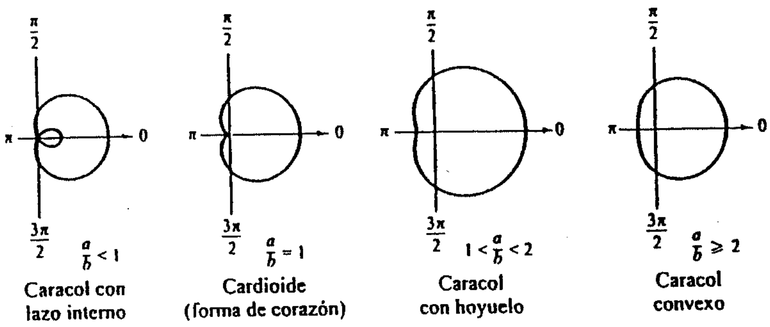
47.- a) Calcular el área encerrada por la curva $y = |\mathrm{Ln}x|$, su asíntota y el eje OX con $x \leq 1$.

b) El área plana encerrada por la curva $y = |\mathrm{Ln}x|$ y la recta $y = 1$ gira en torno al eje OX. Calcular el volumen del sólido generado.

c) Se considera el sólido cuya base es el área plana del apartado b). Las secciones producidas en este sólido por planos perpendiculares al eje OX son triángulos equiláteros. Calcular el volumen de dicho sólido.

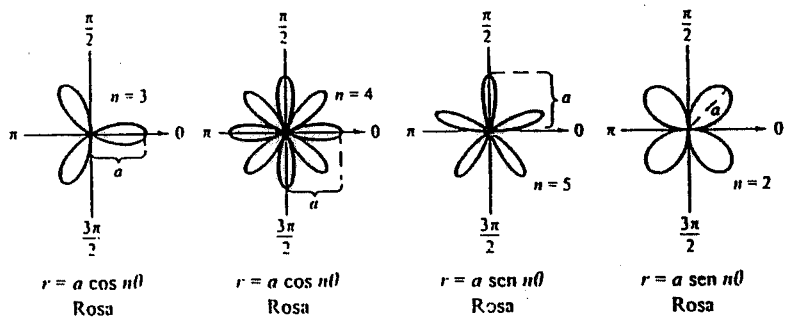
Caracoles

$r = a \pm b \cos \theta$
$r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$
$(0 < a,\ 0 < b)$

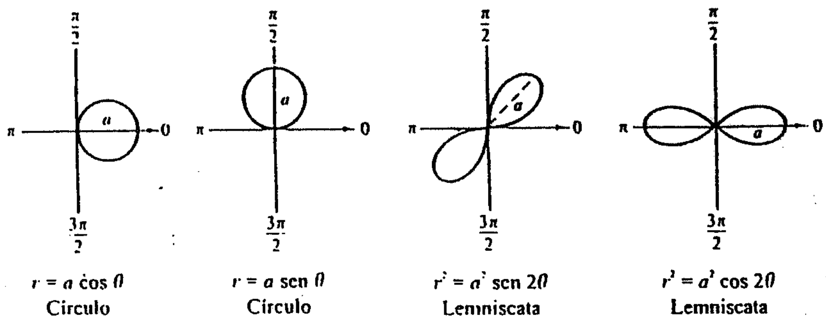


Rosas de

n pétalos si n es impar
$2n$ pétalos si n es par
$(n \geq 2)$



Círculos y Lemniscatas



Recogido de Cálculo: Larson/Hostetler/Edwards (5ª edición).

TEMA 4 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

4.1 Definición y conceptos básicos.

- Tipo. Orden.
- Solución de una Ecuación Diferencial: General, particular, singular.

4.2 Resolución de algunas Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden.

- Ecuaciones Diferenciales de variables separables.
- Ecuaciones Diferenciales lineales.
- Aplicaciones.

4.3 Trayectorias ortogonales.

4.4 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de coeficientes constantes de 2º orden.

- Ecuaciones homogéneas. Espacio vectorial de las soluciones. Sistema fundamental de soluciones. Solución general de la ecuación homogénea.
- Ecuaciones no homogéneas. Solución general: principio de superposición. Solución particular: método de coeficientes indeterminados.

PROBLEMAS

1.- Escribe una ecuación diferencial que describa las situaciones dadas:

a) Una muestra de radio se desintegra a un ritmo que es proporcional a su tamaño.

b) El ritmo a que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la temperatura del medio.

c) El ritmo al que la gripe se propaga en una comunidad es proporcional al número de personas que ya han enfermado y al número de personas que faltan por enfermar.

d) El ritmo al que se propaga el rumor de que se va a dar aprobado general es proporcional al número de alumnos que ya han oido hablar de ello y al número de los que no lo han oido todavía.

e) Una curva $y = y(x)$ es tal que la pendiente de la recta tangente en cada uno de sus puntos es igual al cociente entre la abscisa y la ordenada del citado punto.

f) Una curva es tal que la pendiente de la recta tangente en cada punto es igual al opuesto del cociente entre la ordenada y la abscisa del punto.

2.- Comprobar que la función $y = Ce^{kx}$ es solución de la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = ky$, para cualquiera que sea $C \in \mathbb{R}$.

3.- Comprobar que la función $y = C_1e^x + C_2xe^x$ es solución de la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ para cualquiera que sea C_1 y C_2 de $\mathbb{R}$.

4.- Comprobar que la función $y = 3 - Ce^{-t}$ es solución de la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = -y + 3$ para cualquiera que sea $C \in \mathbb{R}$.

5.- Hallar la Ecuación Diferencial de la familia de curvas siguientes:

a) $x^2 - y^2 - Cx = 0$	d) $x^2 + y^2 = C$	g) $y = Ce^x$
b) $y = C_1e^x + C_2x$	e) $x^2 = Cy$	h) $y^2 = Cx^3$
c) $y^2 = 2kx$	f) $2x^2 - y^2 = C$	i) $y = Cx$

6.- Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

a) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 5x - 6$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 80 - y$

c) $y' + 3x^2y = x^2y^3$

d) $y' \cos^2 x + y - 1 = 0; \quad y(0) = 5$

e) $y' + \left(\dfrac{1}{x}\right) y = 0; \; y(2) = 2$

f) $yy' - e^x = 0$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{y(y+2)}$

h) $y' + y\,\mathrm{tg}x = \sec x + \cos x; \quad y(0) = 1$

i) $y \cos x - \cos x + \dfrac{dy}{dx} = 0$

7.- Resolver las Ecuaciones Diferenciales del problema número 1.

8.- Hallar las trayectorias ortogonales a las familias de curvas del problema número 5 (excepto 5.a y 5.b)

9.- Se ha demostrado que el número $N(t)$ de bacterias por mililitro en un instante t verifica la ecuación diferencial $N'(t) = 0'3N(t)$.

(a) Determinar la solución general de la ecuación.

(b) Dar la solución particular que verifica: $N(0) = 10^3$ bacterias por mililitro.

(c) Se considera la función $N(t) = 10^3\, e^{0'3t}$

Representar N gráficamente. Determinar el tiempo t para el que el número de bacterias sea de 2000 por mililitro.

10.- La tasa de crecimiento de una población de moscas de la fruta en un instante dado es proporcional al tamaño de la población en dicho momento. Si hay 180 moscas después del segundo día del experimento y 300 moscas del cuarto día, ¿cuantas moscas había originalmente?

11.- El ritmo de desintegración del radio es proporcional a la cantidad presente en un instante dado. Hallar el porcentaje de una muestra actual que quedará al cabo de 25 años, si la semivida del radio es de 1600 años.

12.- Tenemos un condensador de capacidad fija C, cargado con cierto potencial V_0. Si conectamos a sus placas una resistencia R, se descargará progresivamente: la carga almacenada en el condensador disminuye produciendo una corriente variable a lo largo de la resistencia

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

donde: Q es la carga que permanece en el condensador en cada instante, y vale $Q = VC$, e I es la intensidad que circula por la resistencia y vale $I = V/R$.

(a) Calcular el tiempo que tardará el condensador en reducir el potencial entre sus placas a la mitad en función de las características del circuito (C y R), y las condiciones iniciales (V_0).

(b) ¿Cuánto tardaría si colocásemos una resistencia doble de la anterior?

13.- La Ley de Newton sobre enfriamiento afirma que el ritmo de cambio de temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo T y la del medio ambiente T_m:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m); \quad k > 0$$

(a) Se introduce el cuerpo en una habitación que esta a 0°F y se pide:

(a_1) Resolver la ecuación y dibujar la solución.

(a_2) Si el cuerpo que se introduce está a 100°F ¿Cuál será la temperatura del cuerpo en cada instante de tiempo?

(b) Un cuerpo que está a 50°F se saca al aire libre donde la temperatura es de 100°F. Resolver la ecuación y dibujar la solución.

14.- Hallar el haz de trayectorias ortogonales al haz de parábolas de eje de simetría OX y vértice $P = (2, 0)$

15.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' + y = 5e^{3x}$

b) $y'' + y = e^{x}$

c) $y'' - y' = e^{x}$

d) $y'' - 2y' = x - \cos x$

e) $y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}$

f) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

g) $y'' - 5y' + 6y = 5e^{4x}$

h) $y'' - y' = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$

i) $4y'' - 8y' + 3y = x + \operatorname{sen} x$

j) $y'' + y = \operatorname{sen} x + 2\cos x$

16.- Consideramos dos masas $m_1 = 4M$ y $m_2 = M$ suspendidas de sendos muelles de constante elástica K, tal que $K = 4M$. La posición de cada masa verifica la ecuación diferencial $m\dfrac{d^2y}{dt^2} + Ky = 0$ siendo m la masa correspondiente. Se pide

(a) Obtener para cada masa la función que determina su posición en función del tiempo si las condiciones iniciales de cada una de ellas son

$$\begin{array}{ll} y_1(0) = 0 & y_2(0) = 0 \\ \dfrac{dy_1}{dt}(0) = 2 & \dfrac{dy_2}{dt}(0) = 2 \end{array}$$

(b) Determinar los instantes en que ambas masas se cruzan en el intervalo $t \in [0, 2\pi]$.

(c) Calcular en el intervalo $t \in [0, 2\pi]$ el instante en el que la distancia entre las masas sea máxima.

17.- Hallar las curvas que tienen la propiedad de que la ordenada en el origen de la recta tangente en cada uno de sus puntos es igual al cuadrado de la ordenada del punto de contacto.

18.- En el supuesto que la ecuación diferencial $y'(t) = \dfrac{4}{5}\,y(t) - \dfrac{2}{5}\,y^2(t)$ represente la evolución del número de pasajeros en un cierto aeropuerto, con y en millones de pasajeros y t en años medidos en décadas, se pide:

a) Hallar la función que representa el número de pasajeros $y(t)$, supuesto que en el momento inicial lo utilizaron medio millón de personas.

b) ¿El número de pasajeros aumenta con el tiempo? ¿Existirá un número máximo de viajeros que podrán utilizar el aeropuerto? ¿Existe algún instante en que se produzca un punto de crecimiento máximo del número de viajeros?

19.- Dada la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} + Ky = \operatorname{sen} x$. Se pide:

a) Resolver la ecuación diferencial para los distintos valores de K.

b) ¿Para qué valores de K la solución de la ecuación diferencial obtenida es no acotada? Hallar es ese caso la solución que verifique que para $x = 0$, $y = y' = 0$.

20.- La ecuación diferencial que rige el movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguador es:

$$y'' + \frac{\mu}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

donde m =masa, k =constante recuperadora del muelle y μ =constante de amortiguamiento.

Expresar la ecuación del movimiento (solución de la ecuación diferencial) en el supuesto que:

a) $m = 10$ gr; $k = 40$ dinas/cm; $\mu = 50$ dinas seg/cm; $y(0) = 3,\ y'(0) = 0$

b) $m = 10$ gr; $k = 40$ dinas/cm; $\mu = 40$ dinas seg/cm; $y(0) = 3,\ y'(0) = 0$

c) $m = 10$ gr; $k = 50$ dinas/cm; $\mu = 40$ dinas seg/cm; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Representar las tres trayectorias y señalar en cada caso qué tipo de movimiento se produce y su comportamiento a lo largo del tiempo.

21.- Las Fórmulas de Breguet permiten determinar de forma aproximada las actuaciones de un avión en vuelo horizontal: autonomía (tiempo en vuelo) y alcance (distancia recorrida). En forma adimensional estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} &\text{autonomía específica:} \quad \frac{dt}{dW} = -\frac{1}{W}\frac{2V^2}{V^4+1} \\ &\text{alcance específico:} \quad \frac{dx}{dW} = -\frac{1}{\sqrt{W}}\frac{2V^3}{V^4+1} \end{aligned} \qquad [1]$$

siendo las variables adimensionales utilizadas t : tiempo, x: distancia, V velocidad y W peso.

Se introduce también en forma adimensional el peso de combustible transportado ζ :

$$\begin{aligned} t &= t_{inicial} = 0 \Rightarrow W = 1 \\ t &= t_{final} = \Rightarrow = 1 - \zeta \end{aligned} \qquad [2]$$

Se pide:

a) Los valores de V que maximizan la autonomía específica $(V)_{(dt/dW)_{\text{máx}}}$ y el alcance específico $(V)_{(dx/dW)_{\text{máx}}}$ (W es un parámetro).

b) Para poder integrar las ecuaciones [1] es preciso especificar la ley de pilotaje $V = V(W)$ y tener en cuenta las condiciones [2].

b.1) Integrar [1] siendo $V = V_i$ constante. Calcular en este caso $t_{\text{máx}}$ $\left(\text{con } V_i = (V)_{(dt/dW)_{\text{máx}}}\right)$ y $x_{\text{máx}}$ $\left(\text{con } V_i = (V)_{(dt/dW)_{\text{máx}}}\right)$

b.2) Integrar [1] siendo $V = \dfrac{V_i}{\sqrt{W}}$, V_i constante. Calcular en este caso los valores de V_i que maximizan la autonomía $(V_i)_{t_{\text{máx}}}$ y el alcance $(V_i)_{x_{\text{máx}}}$.

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

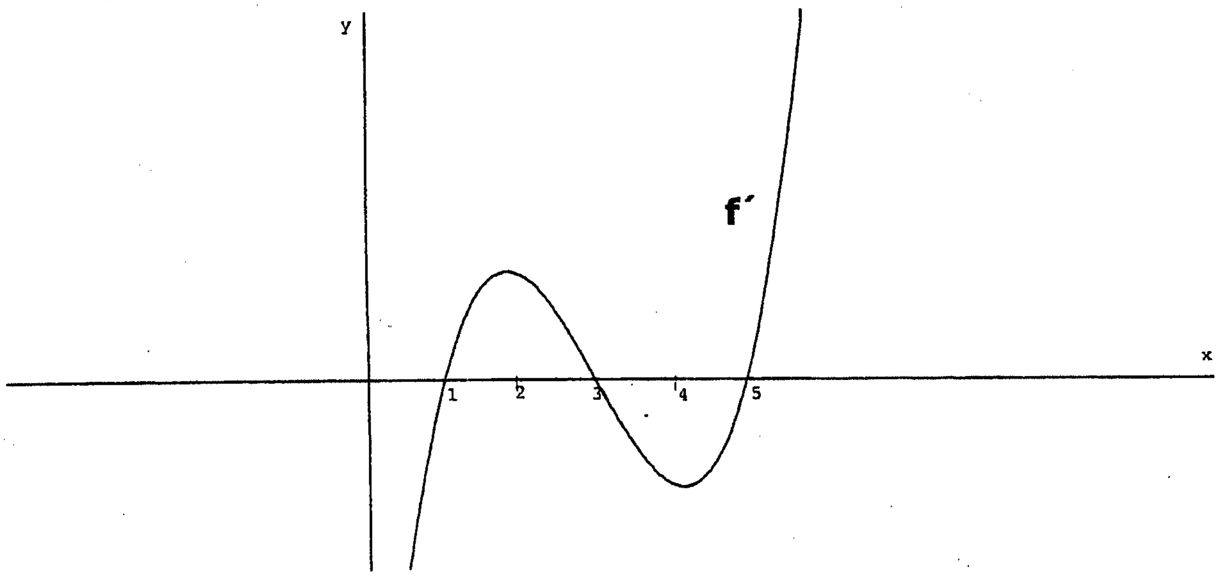
EXAMEN DE CÁLCULO I

8 de febrero de 2003

PRIMERA PARTE

Tiempo: 1 hora 45 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 6 de marzo de 2003.
Fecha revisión: 10 marzo de 2003.

1.- Sabiendo que la gráfica representa la derivada f' de una función f



a) ¿En qué intervalos la función f crece o decrece?

b) ¿En qué puntos la función tiene extremos locales? ¿De qué tipo son?

c) ¿Dónde la función f es cóncava o convexa?

d) Si $f(0) = 1$, dibuje una gráfica posible de f.

e) Dibuje una posible gráfica de f'' indicando alguna característica.

JUSTIFIQUE CLARAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS.

(Sigue detrás)

2.- A.- Calcule, **utilizando coordenadas polares**, el área interior a las dos elipses:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

B.- Calcule el volumen de revolución resultante del giro del área R, alrededor del eje x (plantearlo por tubos y discos y hacerlo de una de las dos formas).

$$R=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2/\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1;\ \frac{x^2}{4}+\ y^2\geq 1;\ y\geq 0\right\}$$

3.- Determine la posición $y(t)$ y la velocidad en cualquier instante t, de un determinado sistema masa-resorte amortiguado y libre que verifica la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+9y=0,$$

sabiendo que en $t=0$ la masa se suelta de la posición de equilibrio ($y(0)=0$) con una velocidad hacia arriba de 2 cm/seg.

Calcule los valores de t en los que se produce el desplazamiento máximo respecto a la posición de equilibrio y la velocidad máxima de la masa e indicar estos valores.

Represente la función $y=y(t)$.

Puntuación Primera Parte:

Problema 1: 2'5 ptos. Problema 2: 2 ptos. Problema 3: 3 ptos.

Puntuación Segunda Parte: 2'5 ptos.

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA
EXAMEN DE CÁLCULO I
8 de febrero de 2003

SEGUNDA PARTE

Tiempo: 45 minutos
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 6 de marzo de 2003.
Fecha revisión: 10 marzo de 2003.

A.- Demuestre el teorema del valor medio o de los incrementos finitos:

"Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$".

Aplíquelo a la función $f(x) = x^2$ con $a = 0$ y $b = 2$, calculando el punto c del intervalo $(0, 2)$ que verifica el teorema.

B.- Calcule $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$

C.- Represente los números complejos z que verifican:

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2\sqrt{2}$$

D.- Utilice las reglas del trapecio y de Simpson para estimar $\int_0^1 f(x)dx$ a partir de los siguientes datos:

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)$	1	0.8	1.3	1.1	1.6

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA
EXAMEN DE CÁLCULO I
4 de septiembre de 2003

PRIMERA PARTE

Tiempo: 1 hora 45 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 12 de septiembre de 2003.
Fecha revisión: 15 de septiembre de 2003.

1.- A.- Dibuje la gráfica de una función continua y par, tal que $f(0) = 0$, y $\begin{cases} f'(x) = 2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ f'(x) = -1 & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ f'(x) = 1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

B.- Demuestre que la ecuación $x^{101} + x^{51} + x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz.

C.- De una función f se sabe que: $f(0) = 0$, $\quad 2 \leq f'(x) \leq 5, \quad \forall x \in [0, 4]$. Demuestre que $8 \leq f(4) \leq 20$.

JUSTIFIQUE CLARAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS.

2.- A.- Calcule, mediante integración, el volumen que engendra el área interior del rombo de vértices A(3,1), B(4,2), C(3,3) y D(2,2) al girar alrededor del eje OX.

B.- Hallar, mediante integración, el volumen de sección conocida correspondiente a un cono recto de altura h, cuya base es una elipse de semiejes a y b.

3.- Desde un globo estacionario se deja caer un paracaídas con un objeto de masa $m = 10$ kg. La ecuación diferencial que describe la velocidad de caída cuando la resistencia que opone el aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea es:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

donde k es una constante positiva que depende de la forma y del tamaño del paracaídas.

Calcule:

a) La velocidad de caída en cualquier instante t suponiendo $v(0) = 0$ (tomar $g = 10\text{m/seg}^2$).

b) El valor de k para que la velocidad límite o terminal sea $\dfrac{1}{2}$ m/seg.

c) La posición del móvil: $s = s(t)$ en cualquier instante, supuesto $s(0) = 3000$ m. $\left(\dfrac{ds}{dt} = v\right)$

Puntuación Primera Parte: Problema 1: 1,5 ptos. Problema 2: 2,5 ptos. Problema 3: 3 ptos.
Puntuación Segunda Parte: A:1,25 ptos. B:0,5 ptos. C:0,5 ptos D:0,75 ptos

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA
EXAMEN DE CÁLCULO I
4 de septiembre de 2003

SEGUNDA PARTE

Tiempo: 45 minutos
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 12 de septiembre de 2003.
Fecha revisión: 15 de septiembre de 2003.

A.- Demuestre el teorema del valor medio para integrales:

"Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, existe un número $c \in (a, b)$ para el cual $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$".

B.- Identifique razonadamente y represente en el plano complejo la curva:

$$C = \{z \in \mathbb{C} / |z - 2 + 2i| = |z|\}$$

C.- Calcule y represente en el plano complejo $z = \sqrt[6]{1}$, expresando la solución en forma binómica.

D.- Sea la función $f(x) = x^3 - x + 1$. Se pide aproximar numéricamente la solución de la ecuación $f(x) = 0$ aplicando los métodos siguientes:

a) Método de iteración de punto fijo, con un punto inicial $x_0 = -1$.

b) Realice 2 iteraciones con punto inicial $x_0 = -1$, del método de Newton-Raphson.

c) Realice 2 iteraciones con intervalo inicial [-2,0], del método de bisección.

(Represente gráficamente y justifique adecuadamente los resultados obtenidos.)

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

7 de febrero de 2004

Tiempo: 2 hora 45 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 19 de febrero de 2004.
Fecha revisión: 20 febrero de 2004.

PROBLEMA 1. Calcula el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3_{\frac{\pi}{3}} & -\sqrt{3}+i \\ e^{i\frac{\pi}{6}} & -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i \end{pmatrix}$, dando el resultado en forma binómica.

PROBLEMA 2. Sea la función $f(x) = e^{-x^2}$:

a) Un rectángulo tiene su base sobre el eje OX y dos vértices sobre la función dada. Demuestra que dicho rectángulo tiene la máxima área cuando los dos vértices están en los puntos de inflexión de la función.

b) Calcula el volumen generado cuando el área encerrada por la curva y los semiejes coordenados de orientación positiva gira alrededor del eje OY.

PROBLEMA 3.

Sea C la lemniscata de ecuación $(x^2+y^2)^2 - 4(x^2-y^2) = 0$

a) Calcula la pendiente en cada punto de la curva. Calcula los puntos de C situados en el primer cuadrante con tangente horizontal.

b) Deduce la ecuación $r = f(\theta)$ en coordenadas polares de C. Demuestra que C es simétrica respecto del eje polar y respecto de la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

c) Desde la ecuación en polares: Calcula los puntos de C situados en el primer cuadrante con tangente horizontal. ¿Son los mismos que en el apartado a)?

d) Calcula el área interior de C.

PROBLEMA 4. Resolver $\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2y+\cos^2 y} \\ y(2) = 0 \end{cases}$

PROBLEMA 5.

Demuestra que la longitud de arco de $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ viene dada exactamente por la integral definida $s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$.

Problema 1: 1 pto. Problema 2: 2,75 ptos. Problema 3: 3,25 ptos. Problema 4: 1,5 ptos.
Problema 5: 1,5 ptos.

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

24 de Junio de 2004

Tiempo: 2 hora 30 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 29 de junio de 2004.
Fecha revisión: 30 de junio de 2004.

PROBLEMA 1.

Utilizar la fórmula de De Moivre para obtener una expresión del $\cos 3\theta$ en términos de potencias de $\cos\theta$.

PROBLEMA 2.

Sea la función $f(x) = \int_2^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt$, estudiar el crecimiento de $f(x)$ y de $f'(x)$ $\forall x > 1$.

PROBLEMA 3.

Calcular mediante integración, el volumen del sólido de revolución generado al girar, alrededor del eje $y = -1$, el área interior a la circunferencia de centro (0,3) y radio 1.

PROBLEMA 4.

a) Representar razonadamente la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x-1|}}$.

b) Estudiar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$

PROBLEMA 5.

Resolver: $\begin{cases} xy' = y + x^3 \operatorname{sen} x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

PROBLEMA 6.

Demostrar el siguiente teorema:

si $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces es continua en $x = a$.

Problemas 1: 1 pto. Problemas 2: 1,5 ptos. Problemas 3: 2 ptos. Problemas 4: 2,5 ptos.

Problemas 5: 1,5 ptos. Problemas 6: 1,5 ptos.

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

3 de Septiembre de 2004

Tiempo: 2 hora 30 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 13 de septiembre de 2004.
Fecha revisión: 14 de septiembre de 2004.

PROBLEMA 1. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son las raíces del polinomio
$P(z) = z^3 - (7+4i)z^2 + (10+18i)z + (2-16i)$, sabiendo que $z = 3+2i$ es una raíz.

PROBLEMA 2.

I. Dada la función $f(x) = xe^{-2x}$, se pide:

a) Determinar los extremos absolutos, relativos y puntos de inflexión de la función, si los hubiera.

b) Representar razonadamente la función.

II. Sea la función $g(x) = \dfrac{1}{16}e^{-2x}(x+2)$. Se pide:

a) Calcular el polinomio de MacLaurin de grado 3 de la función, expresando el resto en la forma de Lagrange.

b) Aproximar el valor de $g(1)$ utilizando el polinomio anterior y estimar el error cometido.

PROBLEMA 3.

Sea la región $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1, \quad 4x^2 + y^2 \leq 4\}$

a) Dibujar la región.

b) Haciendo un cambio a coordenadas polares comprobar las simetrías de R y calcular su área.

c) Plantear las integrales que permitirían obtener el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar R en torno al eje $y = 2$.

PROBLEMA 4. Representar la familia de curvas $y^2 = 4(x - C)$. Calcular y representar las trayectorias ortogonales de dicha familia.

PROBLEMA 5.

Demostrar el siguiente teorema.

Sea f una función derivable en un intervalo I, se verifica:

(i) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I.

(ii) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es decreciente en I.

Problemas 1: 1 pto. Probl. 2: 3,5 ptos. Probl. 3: 2,5 ptos. Probl. 4: 1,5 ptos. Probl. 5: 1,5 ptos.

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

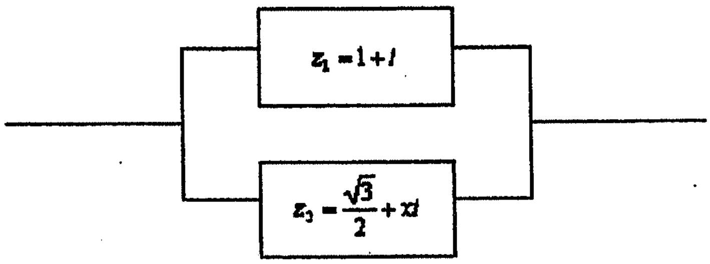
EXAMEN DE CÁLCULO I

2 de febrero de 2005

Tiempo: 2 hora 15 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la Escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 16 de febrero de 2005.
Fecha revisión: 17 febrero de 2005.

PROBLEMA 1.

En un circuito de corriente alterna se disponen dos impedancias en paralelo $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + xi$, $x \in \mathbb{R}$. Sabiendo que la impedancia total z_T viene dada por $\dfrac{1}{z_T} = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$, se pide el valor de x tal que z_T sea un número real. ¿Podría conseguirse un valor de x tal que z_T fuera un número imaginario puro?



PROBLEMA 2.

a) Expresar la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x, \ \ x \geq -y\}$ en forma polar.

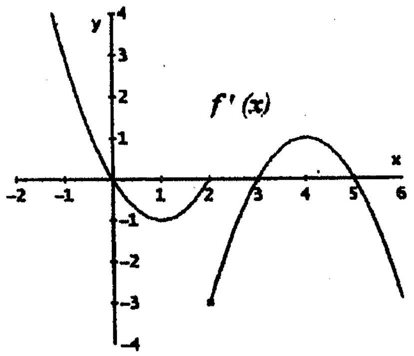
b) Expresar en coordenadas polares la familia de circunferencias con centro en el eje polar y que pasan por el polo. Encontrar la circunferencia del haz anterior tal que el área de la región D interior a dicha circunferencia vale $(\pi + 2)u^2$.

c) Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x, \ y \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}x, x^2 + (y - \sqrt{3})^2 \leq 3\}$. Hallar el volumen generado al girar la región C alrededor de la recta $y = -2$.

d) Calcular el volumen de un sólido de base la región C donde las secciones perpendiculares al eje OX son triángulos rectángulos isósceles con un cateto en el plano XOY.

PROBLEMA 3.

Sabiendo que la gráfica representa la derivada f' de una función **continua** f.



a) Identificar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) ¿Para qué valores de x la función f es cóncava hacia arriba?.

c) Identificar, si existen, máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función f.

d) Representar, según el resultado de los apartados anteriores, una posible gráfica de $f(x)$ considerando $f(0) = 0$.

PROBLEMA 4.

Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = ax^3$ con $a \in \mathbb{R}$. Representar ambas familias según los valores de sus parámetros respectivos.

PROBLEMA 5.

Demostrar el siguiente teorema:

"Si $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces es continua en $x = a$."

Problema 1: 1 pto. Problema 2: 4 ptos. Problema 3: 2 ptos. Problema 4: 1,5 ptos.

Problema 5: 1,5 ptos.

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA
EXAMEN DE CÁLCULO I
10 de junio de 2005

Tiempo: 2 hora 15 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la Escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 17 de junio de 2005.
Fecha revisión: 20 junio de 2005.

PROBLEMA 1.

Expresar en forma módulo-argumental las soluciones de la ecuación: $-1+i = z^3$ y representarlas en el plano complejo.

PROBLEMA 2.

Sea la función $y = \dfrac{x^3}{|x^2-1|}$

a) Calcular las asíntotas, los puntos críticos, y los extremos absolutos y relativos si los hubiera de la función anterior.

b) Plantear la integral que calcula el área bajo la función anterior para $x \in [0, \sqrt{3}]$ ¿Es impropia?. Estudiar su convergencia.

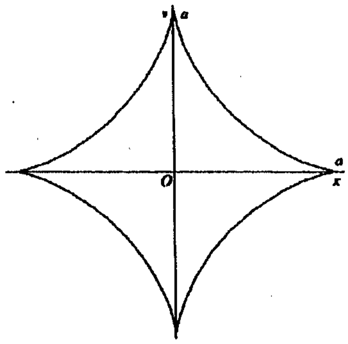
PROBLEMA 3.

Dada la función $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{e^t}{\sqrt{t}}dt \quad x \in [1, +\infty)$.

Estudiar si admite función inversa. En caso afirmativo estudiar si la función inversa es derivable y calcular $(F^{-1})'(0)$.

PROBLEMA 4.

Sea $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ con $a = 2\sqrt{2}$ la ecuación del astroide:



a) Calcular la pendiente de la recta tangente al astroide en el punto (1,1)

b) Comprobar que $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\mathrm{sen}^3 t \end{cases}$ con $t \in [0, 2\pi]$ son unas ecuaciones paramétricas del astroide. Partiendo de estas ecuaciones, calcular la pendiente de la recta tangente en el punto (1,1).

c) Calcular la longitud del arco del astroide situado en el primer cuadrante utilizando las ecuaciones paramétricas con $t \in [0, \pi/2]$.

PROBLEMA 5.

Hallar la curva $y = y(x)$ que pasa por el punto (1,0) y tal que el rectángulo que tiene como altura la ordenada en el origen de la tangente a la curva en cada punto y como base la abscisa de dicho punto, verifica que su perímetro y su área tiene el mismo valor numérico.

PROBLEMA 6.

Sea f inyectiva y derivable, entonces $(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ siempre que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$

Problema 1: 1 pto. Problema 2: 2,5 ptos. Problema 3: 1,5 ptos. Problema 4: 2 ptos.

Problema 5: 1,5 ptos. Problema 6: 1,5 ptos.

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA
EXAMEN DE CÁLCULO I
1 de septiembre de 2005

Tiempo: 2 hora 15 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la Escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 7 de septiembre de 2005.
Fecha revisión: 8 septiembre de 2005.

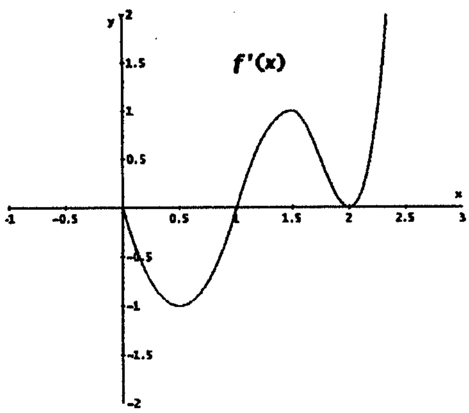
PROBLEMA 1.

Representar gráficamente los valores de z que verifican la ecuación:

$$|z-3| = 2|z+3|$$

PROBLEMA 2.

Sea $f(x)$ una función derivable en $\mathbb{R}$ donde su derivada $f'(x)$ para $x \in [0,3]$, presenta la siguiente gráfica:



a) Hallar los intervalos de crecimiento, estudiar la concavidad y deducir máximos, mínimos y puntos de inflexión de $f(x)$ para $x \in (0,3)$.

b) Trazar una posible gráfica de la función $f(x)$ para $x \in [-3,3]$ sabiendo que es impar y que $f(0) = 0$ y $f(2) = 0$.

c) Derivando implícitamente demostrar que si una función cualquiera $g(x)$ es impar entonces $g'(x)$ es par.

PROBLEMA 3.

Sea $f(x) = \sqrt{x+3}$. Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 1$. Dibujar $f(x)$ y la recta tangente. Mediante una aproximación lineal estimar $\sqrt{3,98}$.

PROBLEMA 4.

Un cable con forma de catenaria $y = \text{Ch}x$ con $-2m \leq x \leq 2m$ cuelga de postes de altura 3,76m.

a) Obtener la longitud del cable.

b) Obtener el área de la región R del plano delimitado por las siguientes curvas: $y = \text{Ch}x$; $x = -2$; $x = 2$; $y = 0$.

c) Obtener el volumen del cuerpo de revolución que resulta al girar la región R en torno al eje $x = 2$.

Nota: Tomar la siguientes aproximaciones $\text{Ch}2 \approx 3,76$; $\text{Sh}2 \approx 3,63$.

PROBLEMA 5.

Resolver:

$$\begin{cases} y - 4x = xy' \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

PROBLEMA 6.

Demostrar el Teorema fundamental del Cálculo

Si f es continua en $[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Problema 1: 1 pto. Problema 2: 2 ptos. Problema 3: 1 pto. Problema 4: 3 ptos.

Problema 5: 1,5 ptos. Problema 6: 1,5 ptos.

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

1 de febrero de 2006

Tiempo: 2 horas 30 minutos

Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: jueves 16 de febrero de 2006

Fecha prevista de revisión de exámenes: lunes 20 de febrero de 2006

PROBLEMA 1.

Sea $z_0 = -8 + 8\sqrt{3}\,i$. Representar z_0. Calcular y representar z_0^4 y $\sqrt[4]{z_0}$.

(1 punto)

PROBLEMA 2.

Dada la función $f(x) = 2(x-1)^2 e^{-(x-1)}$, se pide:

a) Calcular el polinomio de Taylor centrado en $x = 1$ y de grado 3 de la función, expresando el resto en forma de Lagrange. Utilizando el polinomio anterior aproximar el valor de $f\left(\frac{4}{3}\right)$.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y concavidad de la función $f(x)$, los extremos y puntos de inflexión (si los hubiera), así como las asíntotas y puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Representar la función utilizando los resultados del apartado anterior.

(3 puntos)

PROBLEMA 3.

Sea la región $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus y \le x^2 \wedge y \le (x-2)^2 \wedge y \ge 0 \wedge 0 \le x \le 2\right\}$. Se pide:

a) Plantear las integrales respecto de x y respecto de y que calcularían el área de R. Calcular el área de la región integrando una de las anteriores.

b) Calcular la longitud del perímetro de R.

c) Calcular el volumen de un sólido de base R donde las secciones perpendiculares al eje OY son cuadrados con un lado situado en la base del sólido.

d) Calcular el volumen de revolución obtenido al girar R alrededor de la recta $x = 2$.

(3 puntos)

PROBLEMA 4.

Resolver:

$$\begin{cases} (1+x^2)\,y' + 2xy = 3\sqrt{x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

PROBLEMA 5.

Demostrar el siguiente teorema:

"Si $f(x)$ es derivable en $x = a$ entonces $f(x)$ es continua en $x = a$"

(1,5 puntos)

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

24 de junio de 2006

Tiempo: 2 horas 30 minutos

Los problemas deben entregarse separados.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: martes 4 de julio de 2006

Fecha prevista de revisión de exámenes: miércoles 5 de julio de 2006

Si se desea revisión de examen, ésta deberá solicitarse señalándolo en la lista dispuesta en el despacho 405.

PROBLEMA 1.

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, expresar z_1 en forma módulo-argumental y z_2 en forma binómica:

a) $z_1 = \dfrac{32\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)}{\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\right)^4}$

b) $z_2 = 13\dfrac{i^{111}\left(1 - i^{15}\right)}{(3+2i)\,i^{37}}$

(1 punto)

PROBLEMA 2.

Sea la función $f(x) = (1 - |x|)e^x$. Se pide:

a) Estudiar la derivabilidad de la función en $x = 0$.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y concavidad de la función $f(x)$, los extremos y puntos de inflexión (si los hubiera), así como las asíntotas y puntos de corte con los ejes coordenados. Dibujar la gráfica de $f(x)$.

c) ¿Alcanza la función extremos absolutos en el intervalo $\left[-\dfrac{3}{2}, 1\right]$? Justifica la respuesta. Calcularlos en caso afirmativo.

(3 puntos)

PROBLEMA 3.

Dadas las curvas expresadas en coordenadas polares $\rho_1(\theta) = 1 + \cos\theta$ y $\rho_2(\theta) = 2 + 2\cos\theta$, se pide:

a) Calcular el área encerrada entre ambas curvas.

b) Calcular los puntos donde la recta tangente a la curva $\rho_1(\theta)$ es vertical.

(2 puntos)

PROBLEMA 4.

Estudiar si la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2 - 1}\,dx$ es impropia y en caso afirmativo determinar si converge o no.

(1 punto)

PROBLEMA 5.

Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas cuya ecuación es $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = K, K \in \mathbb{R}$. Dibujar ambas familias de curvas según los valores de sus parámetros respectivos.

(1,5 puntos)

PROBLEMA 6.

Demostrar el teorema del valor medio para integrales:

"Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$"

(1,5 puntos)

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

1 de septiembre de 2006

Tiempo: 2 horas 30 minutos

Los problemas deben entregarse separados.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: martes 12 de septiembre de 2006

Fecha prevista de revisión de exámenes: martes 19 de septiembre de 2006

Si se desea revisión de examen, ésta deberá solicitarse señalándolo en la lista dispuesta en el despacho 405 UNA VEZ PUBLICADAS LAS NOTAS.

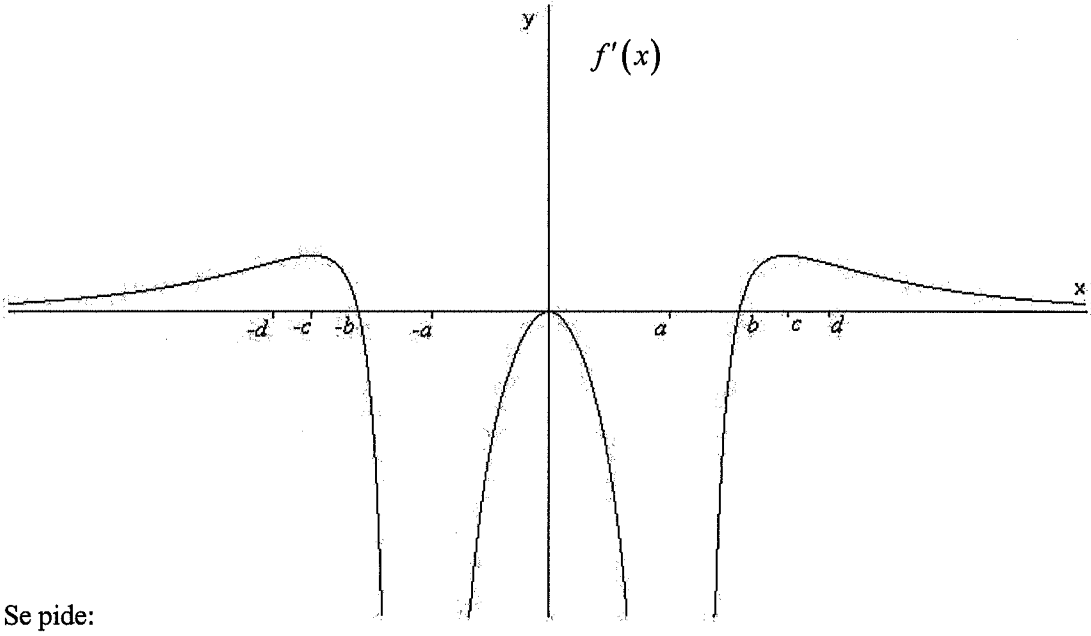
PROBLEMA 1.

Dado el polinomio $P(z) = 2z^4 - 2z^3 - 2z^2 - 2z - 4$, $z \in \mathbb{C}$, se pide representar el polígono cuyos vértices son las raíces del polinomio, sabiendo que $z = \pm i$ son raíces del mismo. Calcular el **perímetro** del polígono obtenido.

(1 punto)

PROBLEMA 2.

La derivada $f'(x)$ de una cierta función continua $f(x)$ tiene una gráfica que es simétrica respecto del eje de ordenadas, con asíntotas verticales en $x = \pm a$, máximos relativos en $x = \pm c$ y $x = 0$, y con puntos de inflexión en $x = \pm d$. Tómese, como ejemplo, la gráfica siguiente:



Se pide:

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. ¿En qué puntos la función $f(x)$ alcanza extremos relativos? ¿De qué tipo son?

b) Determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la función $f(x)$.

c) Dibujar una posible gráfica de $f(x)$ sabiendo que es continua.

d) Dibujar una posible gráfica de la función $f''(x)$.

(3 puntos)

PROBLEMA 3.

Dada la región $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \le x \le 2 \wedge 0 \le y \le \left|x^2 - 1\right|\right\}$, se pide:

a) Calcular el área de R.

b) Calcular el volumen de revolución obtenido al girar R alrededor de la recta $x = 2$.

(1,5 puntos)

PROBLEMA 4.

Sean $f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ e^x & 0<x\le 1 \\ 2 & 1<x\le 2 \\ 3-x & 2<x\le 3 \\ 0 & x>3 \end{cases}$ y $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Se pide

a) Representar $f(x)$. Encontrar una expresión para $g(x)$ análoga a la de $f(x)$.

b) Determinar la continuidad y derivabilidad de la función $g(x)$.

(1,5 puntos)

PROBLEMA 5.

Dada la ecuación diferencial $y'=0.005y-0.0005y^2$, se pide:

a) Hallar la solución general de la ecuación diferencial, expresándola en forma explícita $y=y(x;C), C\in\mathbb{R}$.

b) Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial que verifica $y(20)=\dfrac{100}{1-e}$.

(1,5 puntos)

PROBLEMA 6.

Demostrar el teorema del valor medio o de los incrementos finitos:

"Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$"

(1,5 puntos)

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

1 de febrero de 2007

Tiempo: 2 horas y 15 minutos

Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: **viernes 16 de febrero de 2007**

Fecha prevista de revisión de exámenes: **viernes 23 de febrero de 2007**

PROBLEMA 1.

Sea la ecuación $z^3 + 1 = 0, z \in \mathbb{C}$. Representar las soluciones de la ecuación, expresándolas en forma binómica y en forma exponencial. Calcular el perímetro y el área del polígono cuyos vértices son las soluciones de la ecuación.

(1 punto)

PROBLEMA 2.

Dada la función $f(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$, se pide:

a) Determinar el dominio de la función y el intervalo donde $f(x) > 0$. Determinar las asíntotas de $f(x)$, si las hubiera.

b) Obtener la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = e$. Aplicar el teorema de la función inversa para calcular $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

c) Calcular el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 2 en un entorno de $x = e$. Utilizar el polinomio para dar una aproximación de $f\left(\dfrac{3}{2}e\right)$.

(3,5 puntos)

PROBLEMA 3.

Sea la región $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq (y-1)^2 \wedge (x-4) \leq -2(y-1)^2 \wedge 0 \leq y \leq 2\right\}$. Se pide:

a) Representar la región R y calcular su área.

b) Calcular por el método de tubos el volumen de revolución obtenido al girar R alrededor del eje OX.

c) Plantear las integrales que calcularían por el método de discos el volumen de revolución obtenido al girar R alrededor del eje OY.

(3,0 puntos)

PROBLEMA 4.

Resolver la ecuación diferencial siguiente, identificando y representando la solución obtenida:

$$\begin{cases} xy' + (1-2x)y = 1 \\ y(1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(1,5 puntos)

PROBLEMA 5.

Enunciar el Teorema de Rolle.

Utilizando este teorema demostrar que si $b < 1$ los polinomios $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ y $Q(x) = x^2 + bx + c$ se cortan en un único punto.

Sugerencia: utilizar la función $h(x) = P(x) - Q(x)$.

(1 punto)

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

21 de junio de 2007

Tiempo: 2 horas

Cada problema debe comenzarse en una nueva hoja de examen.

No se permite entregar el examen a lápiz.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: miércoles 4 de julio de 2007

Fecha prevista de revisión de exámenes: viernes 6 de julio de 2007

PROBLEMA 1.

Calcular $z = \dfrac{(-1+i)^{100}}{\left(1-\sqrt{3}\, i\right)^{50}}$, expresando la solución en forma binómica y en forma exponencial.

(1 punto)

PROBLEMA 2.

Dada la función $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, se pide:

a) Calcular los intervalos de crecimiento y concavidad, determinar las asíntotas y trazar su gráfica.

b) Calcular el polinomio de MacLaurin de grado 2 de la función, expresando el resto en la forma de Lagrange. Aproximar el valor de $f(1)$ utilizando el polinomio anterior.

c) Dada la región $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \le e^{-\frac{x^2}{2}} \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0 \right\}$, calcular por el método de tubos el volumen de revolución obtenido al girar D en torno al eje OY.

(3,5 puntos)

PROBLEMA 3.

Sea la curva $r(\theta) = \cos(3\theta)$ dada en coordenadas polares. Se pide:

a) Representar gráficamente la curva. Hallar la recta tangente a la curva en $\theta = 0$ y en $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

b) Calcular el área de una hoja.

c) Plantear la integral que calcularía la longitud de la misma hoja.

(3 puntos)

PROBLEMA 4.

Resolver la ecuación diferencial $y'' = y$ con las condiciones iniciales $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$. Comprobar que la solución obtenida es $y = \operatorname{senh} x + 2\cosh x$.

(1,5 puntos)

PROBLEMA 5.

Demostrar el siguiente teorema:

"Sea $f(x)$ derivable en $I \subset \mathbb{R}$. Si $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b] \subset I$ entonces $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$"

(1 punto)

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

3 de septiembre de 2007

Tiempo: 2 horas 30 minutos

Cada problema debe comenzarse en una nueva hoja de examen.
No se permite entregar el examen a lápiz.
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: martes 11 de septiembre de 2007
Fecha prevista de revisión de exámenes: jueves 13 de septiembre de 2007

PROBLEMA 1.

Hallar el lugar geométrico de los afijos de los números complejos z tales que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-i}{1+i-z}\right)=0$. Identificar y representar dicho lugar geométrico en el plano $\mathbb{R}^2$.

(1,5 puntos)

PROBLEMA 2.

Dada la función $f(x)=\dfrac{|x|^3}{|x-3|}$, se pide:

a) Estudiar la derivabilidad de la función en $x=0$ y en $x=3$

b) Determinar los extremos relativos de $f(x)$, así como sus asíntotas, si las hubiera.

c) ¿Se puede asegurar que la función alcanza extremos absolutos en el intervalo $\left[-3\,,\,\dfrac{5}{2}\right]$? Calcularlos en caso afirmativo.

(3 puntos)

PROBLEMA 3.

Sea la región $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y\le \operatorname{senh} x \wedge y\ge 0 \wedge 0\le x\le \ln 2\right\}$. Se pide:

a) Calcular el área de R.

b) Calcular el volumen de revolución obtenido al girar R alrededor de la recta $x=\ln 2$.

c) Calcular el volumen de revolución obtenido al girar R alrededor del eje OX.

(3 puntos)

PROBLEMA 4.

Dada la familia de curvas $3y^2-2y^3=6x+C,\ C\in\mathbb{R}$, determinar su haz ortogonal $z=z(x)$ y hallar la curva del mismo que verifica $z(0)=\dfrac{1}{4}$

(1,5 puntos)

PROBLEMA 5.

Enunciar el Teorema del Valor Medio para funciones derivables: Teorema de Lagrange.

Utilizar este Teorema para demostrar:

$$\left|e^a-e^b\right|\ge|a-b|,\ \forall a,b\in[0,\infty)$$

(1 punto)

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

31 de enero de 2008

Tiempo: 2 horas y 30 minutos

Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: **jueves 14 de febrero de 2008**

Fecha prevista de revisión de exámenes: **martes 19 de febrero de 2008**

PROBLEMA 1.

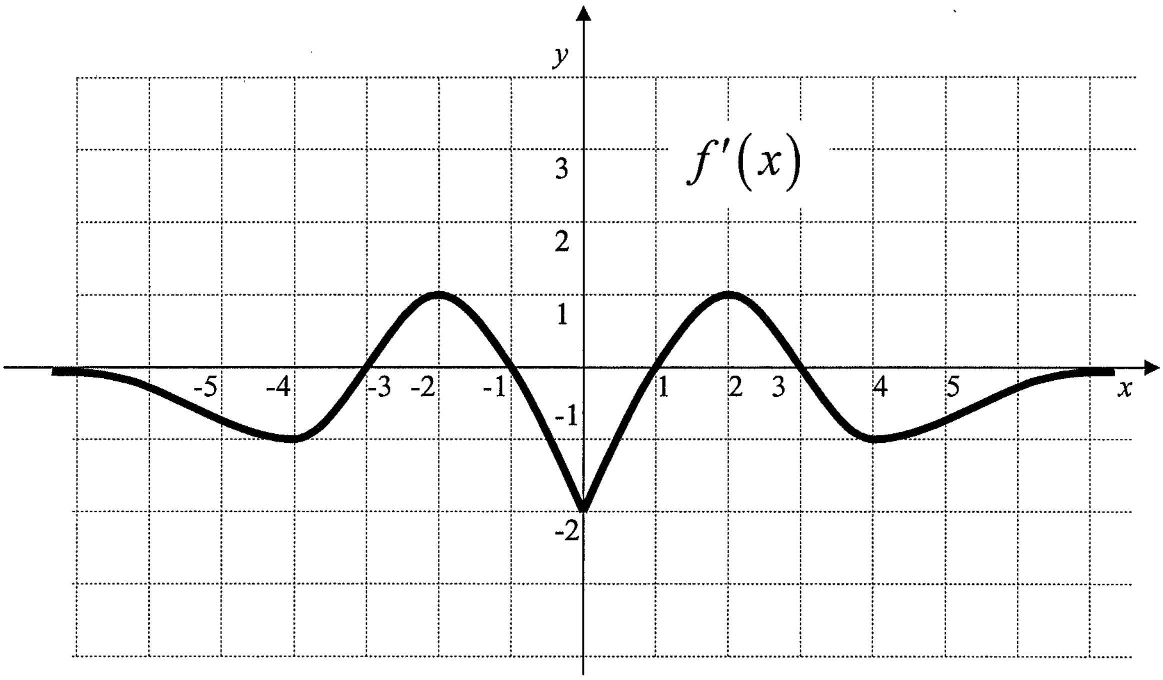
a) Resolver la ecuación $z^2 + \overline{z}^2 = 2$, $z \in \mathbb{C}$. Identificar y representar en $\mathbb{R}^2$ la curva solución.

b) Calcular y representar en el plano complejo $z = \sqrt[3]{i}$ expresando la solución en forma binómica.

1,5 PUNTOS

PROBLEMA 2.

La siguiente gráfica representa la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$ de la que se conoce que $f(0) = 0$.



La función derivada $f'(x)$ es una función par y presenta en $x = 0, \pm 2, \pm 4$ extremos relativos, en $x = \pm 3, \pm 5$ puntos de inflexión e $y = 0$ es asíntota horizontal.

A partir de la gráfica, se pide:

a) Representar justificadamente de forma aproximada la función $f(x)$ en un entorno de $x = 0$.

b) Estudiar el crecimiento y la concavidad de la función $f(x)$, indicando los intervalos correspondientes y deduciendo los extremos relativos y puntos de inflexión.

c) Demostrar que la función $f(x)$ presenta alguna simetría.

d) Dibujar una posible gráfica de la función $f(x)$.

e) Representar justificadamente de forma aproximada la función $f''(x)$ en un entorno de $x = 0$.

2,5 PUNTOS

PROBLEMA 3.

Sea $f(x)=\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$. Se pide:

a) Hallar los extremos absolutos de la función en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Calcular el área de la región limitada por $f(x)$ y las rectas $x=\dfrac{\pi}{2}, y=0$.

c) Plantear las integrales que calcularían por el método de discos el volumen de revolución obtenido al girar el área del apartado b) alrededor del eje *OX*.

d) Plantear la integral que calcularía el área de la región $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0\le y\le f(x)\wedge 0\le x\le\pi\right\}$

¿Es impropia? Estudiar su convergencia.

3,5 PUNTOS

PROBLEMA 4.

Determinar el haz ortogonal a la familia de curvas $\operatorname{sen} x\cosh y=C, C\in\mathbb{R}$. Encontrar las curvas de ambos haces que se cortan en el punto $\left(\dfrac{\pi}{4},\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$

1,5 PUNTOS

PROBLEMA 5.

Sea $F(x)$ la función que determina el área bajo la función $f(t)=e^{-t^2}$ en $[0,x]$. Demostrar que la función $F(x)$ es estrictamente creciente en $x\ge 0$, enunciando los teoremas empleados.

1 PUNTO

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

25 de junio de 2008

Tiempo: 2 horas y 30 minutos

Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: 7 de julio de 2008

Fecha prevista de revisión de exámenes: 9 de julio de 2008

PROBLEMA 1.

a) Probar que $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^{10} = -2^9\left(1+\sqrt{3}\,i\right)$.

b) Obtener y representar en el plano todos los números complejos z solución de la ecuación:

$$\operatorname{Im}\left[\frac{z+3i}{2e^{i\pi/4}}\right]=1$$

1,5 PUNTOS

PROBLEMA 2.

La expresión $\ln\left[\operatorname{sen}^3(xy)\right]-\cos(xy)=0$ define de forma implícita una función $y=y(x)$ en un entorno del punto $(x,y)=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$. Se pide:

a) Calcular la derivada de la función $y(x)$ en $x=1$.

b) Determinar y representar el polinomio de Taylor de grado 2, centrado en $x=1$, de dicha función.

2,0 PUNTOS

PROBLEMA 3.

Sea R la región plana limitada por: $y=\tan x$, $x=0$ e $y=1$.

a) Calcular el área de la región R integrando respecto de la variable x.

b) Calcular el mismo área del apartado a) integrando respecto de la variable y.

c) Plantear por los métodos de tubos y discos las integrales que calcularían el volumen de revolución del sólido generado cuando la región R gira alrededor del eje OX. Calcular el volumen resolviendo el método de discos.

3,5 PUNTOS

PROBLEMA 4.

Sea $y(t)$ el desplazamiento de un determinado sistema libre masa-muelle-amortiguador, solución de la ecuación diferencial con condiciones iniciales $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=0$, $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$.

a) Determinar la función $y(t)$.

b) Calcular, para $t\geq 0$, los valores extremos del desplazamiento $y(t)$ y de la velocidad $y'(t)$.

c) Representar la función $y(t)$, para $t\geq 0$.

2,0 PUNTOS

PROBLEMA 5.

Demostrar el teorema de valor medio para integrales:

"*Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$*"

1,0 PUNTO

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

8 de septiembre de 2008

Tiempo: 2 horas y 30 minutos

Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: 22 de septiembre de 2008

Fecha prevista de revisión de exámenes: 24 de septiembre de 2008

PROBLEMA 1.

Resolver la ecuación $z^4 - i\sqrt{3}\,z^2 - 1 = 0$, expresando las soluciones en forma exponencial y binómica.

Representar las soluciones en el plano $\mathbb{R}^2$ y calcular la longitud del perímetro del polígono que se obtiene al unirlas.

1,5 PUNTOS

PROBLEMA 2.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 12x^4 \ln|x| - 13x^4 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$ a partir de la definición de derivada.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y concavidad de la función. Indicar los valores de x en los que se alcanzan extremos relativos y puntos de inflexión de la función. Estudiar la existencia de asíntotas.

c) Representar la función utilizando los resultados de los apartados anteriores.

d) Obtener el polinomio de Taylor de grado 2 centrado en $x = 1$ de $f(x)$.

3,0 PUNTOS

PROBLEMA 3.

a) Plantear por los métodos de discos y tubos el volumen de revolución del sólido generado cuando

$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x-2)^2 + y^2 \leq 4\right\}$ gira alrededor del eje OY. Calcular el volumen

por el método de tubos.

b) Utilizando coordenadas polares, calcular el área de la región:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 4 \wedge (x-2)^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

3,0 PUNTOS

PROBLEMA 4.

Resolver la ecuación diferencial $2x^2 y' + xy = 1, \quad x > 0$ con la condición inicial $y(1) = 7$

1,5 PUNTOS

PROBLEMA 5.

Enunciar el teorema de la derivada de la función inversa y utilizarlo para demostrar:

$$(\operatorname{arg\,cosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1.$$

1,0 PUNTO

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

4 de febrero de 2009

Tiempo: 2 hora 30 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la Escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 19 de febrero.
Fecha prevista de revisión de exámenes: 23 de febrero.

PROBLEMA 1.
Resolver la ecuación $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ siendo $z \in \mathbb{C}$, expresando sus soluciones en forma polar.

PROBLEMA 2.
Sea la función $f(x) = \ln|x^3 - 1|$

a) Representar la gráfica de $f(x)$ estudiando: dominio, intervalos de crecimiento y extremos, intervalos de concavidad, puntos de inflexión y asíntotas.

b) Demostrar que existe la función inversa de $f(x)$ para $x \in (1, +\infty)$. Enunciar el Teorema de la función inversa y aplicarlo para calcular la derivada de dicha función inversa en el origen.

c) Obtener el polinomio de Taylor de la función $f(x)$ de grado 2 centrado en el punto $x_0 = \sqrt[3]{2}$.

PROBLEMA 3.
Obtener una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{2 + \cos x + \operatorname{sen} x}$

PROBLEMA 4.
Sea la función $f(x) = x\sqrt{1-x}$ con $x \in [0, 1]$.

a) Comprobando que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$, calcular el área de la región R encerrada por $f(x)$ y el eje OX.

b) Plantear las integrales para calcular el volumen generado al girar R alrededor del eje OX, del eje OY, y del eje $x = 1$.

c) Plantear la integral para calcular la longitud de $f(x)$ con $x \in [0, 1]$ ¿Es una integral impropia?

PUNTUACIÓN: Problema 1: 1,5 ptos. Problema 2: 3,5 ptos. Problema 3: 1,5 ptos. Problema 4: 3,5 ptos.

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

20 de junio de 2009

Tiempo: 2 hora 30 minutos

Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: 26/06/09.

Fecha prevista de revisión de exámenes: 29/06/09.

PROBLEMA 1.

a) Sea el número complejo $z = \dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)^{20}}{(1-\sqrt{3}i)^6}$, expresarlo en forma binómica.

b) Identificar y esbozar el lugar geométrico siguiente: $\{z \in \mathbb{C}/Re(z^2) = 1\}$

PROBLEMA 2.

Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1/x}{e^{1/x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

a) Demostrar que $f(x)$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Estudiar el crecimiento y los extremos relativos de $f(x)$.

c) Estudiar la existencia de extremos absolutos de $f(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

d) Estudiar las asíntotas y su posición relativa respecto a la gráfica de la función.

e) Representar la función a partir de los resultados anteriores.

PROBLEMA 3.

Sean las funciones: $f(x) = x^2, \quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

a) Obtener el área de la región R encerrada entre sus gráficas y la recta $x = 2$.

b) Calcular el volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje OY.

c) Calcular la longitud del trozo de la gráfica de $f(x)$ correspondiente a $x \in [0, 2]$.

d) Estudiar, si existe, el volumen del sólido generado al girar, alrededor dèl eje OX, el conjunto de ordenadas de $g(x)$ correspondiente a $x \in [2, +\infty)$.

PROBLEMA 4.

Hallar el volumen de un sólido de base circular de radio 4, sabiendo que todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro dado son triángulos equiláteros.

PUNTUACIÓN: Problema 1: 1,5 ptos. Problema 2: 3,5 ptos. Problema 3: 3,5 ptos. Problema 4: 1,5 ptos.

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

8 de septiembre de 2009

Tiempo: 2 hora 30 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 15/09/09.
Fecha prevista de revisión de exámenes: 18/09/09.

PROBLEMA 1.

Resolver la ecuación $z^4 - iz^2 + \frac{3}{4} = 0$ siendo $z \in \mathbb{C}$. Representar en el plano complejo el polígono cuyos vértices son las soluciones de la ecuación dada y calcular su área.

PROBLEMA 2.

Sea $f(x) = 1 + ex + e^{x+1}$

a) Demostrar que la gráfica de $f(x)$ corta una única vez al eje OX. Enunciar los teoremas empleados.

b) Calcular los extremos absolutos, si existen, de la función $f(x)$ en $\mathbb{R}$. Lo mismo en el intervalo $[-1, 1]$.

c) Calcular el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 2, centrado en $x = -1$. Aproximar con dicho polinomio el valor de $f(0)$ y hallar una estimación del error cometido.

d) Enunciar la Regla de la Cadena y aplicarla para calcular la derivada de $f \circ g$, siendo $g(x) = x^2$.

PROBLEMA 3.

Sea la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + y^2 \leq 1; \quad y^2 \leq x \leq \sqrt{3}\, y\}$

a) Dibujar la región.

b) Calcular el área de la región, utilizando coordenadas polares.

c) Plantear por tubos y discos las integrales para calcular el volumen generado al girar R alrededor del eje OY.

PROBLEMA 4.

Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$.

Demostrar que $F(x)$ es creciente y enunciar el teorema empleado. Estudiar la concavidad de la función.

PUNTUACIÓN: Problema 1: 1,5 ptos. Problema 2: 3,5 ptos. Problema 3: 3,5 ptos. Problema 4: 1,5 ptos.