Control de Procesos Industriales

3. Análisis temporal de sistemas

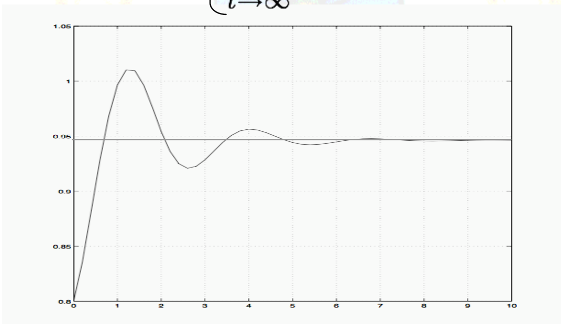
por
Pascual Campoy
Universidad Politécnica Madrid

Análisis temporal de sistemas

- Introducción
- Estabilidad y ganancia estática
- Análisis dinámico

Análisis temporal de sistemas

$$y(t) = y_p(t) + y_t(t) \begin{cases} y_p(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) & \text{régimen permanente} \\ \lim_{t\to\infty} y_t(t) = 0 & \text{régimen transitorio} \end{cases}$$



Estabilidad

- Un sistema se dice que es estable si y sólo si su salida y(t) está acotada ante cualquier entrada u(t) acotada.

$$\boxed{\text{sistema estable} \Leftrightarrow \forall u(t)/u_p(t)< \infty \Rightarrow y_p(t)<\infty}$$

- Un sistema lineal, representado por su f.d.t. G(s), es estable si y solo si todos sus polos tienen parte real estrictamente negativa.
  - Nota: Los polos de G(s) son las raíces de su denominador

Ganancia estática

- Se denomina ganancia estática de un sistema lineal estable a la relación entre su salida y su entrada cuando ambas se han estabilizado.

$$K_p = \lim_{t \to \infty} \frac{y(t)}{u(t)}$$

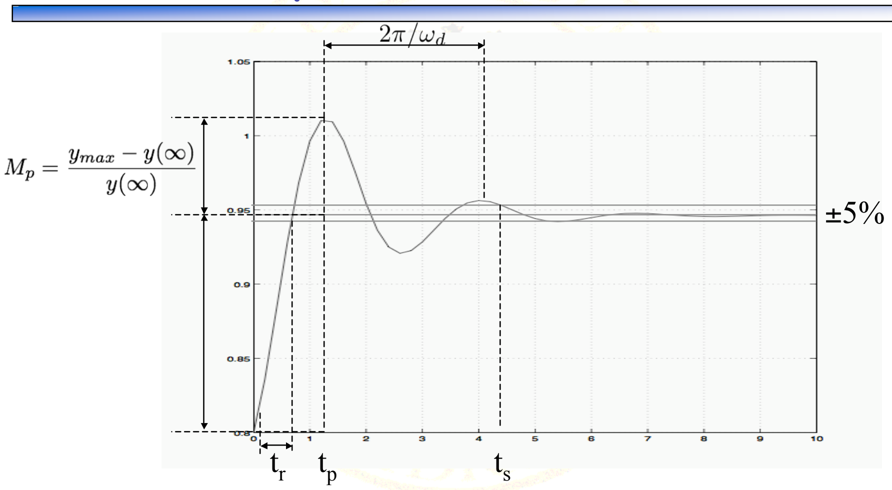
- En sistemas lineales estables representados por su f.d.t. se calcula como:

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$$

Análisis dinámico de sistemas

- Introducción
- Sistemas de primer orden simple
- Sistemas de primer orden con cero
- Sitemas de segundo orden
- Caracterización de la dinámica
- Sistemas de orden superior
- Sistema reducido equivalente

Caracterización respuesta dinámica



Análisis dinámico de sistemas

- Introducción
- Sistemas de primer orden simple
- Sistemas de primer orden con cero
- Sitemas de segundo orden
- Caracterización de la dinámica
- Sistemas de orden superior
- Sistema reducido equivalente

Análisis dinámico de sistemas

- Introducción
- Sistemas de primer orden simple
- Sistemas de primer orden con cero
- Sitemas de segundo orden
- Caracterización de la dinámica
- Sistemas de orden superior
- Sistema reducido equivalente

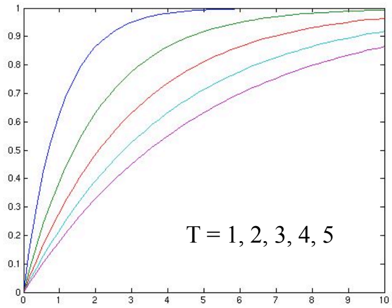
Sistema de 1er orden simple

Ecuación: $T\dot{y} + y = K_p u$ F.d.T.: $G(s) = \dfrac{K_p}{Ts+1}$

- Respuesta ante escalón:

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{\frac{K_p}{T}}{s(s+\frac{1}{T})} = \frac{K_p}{s} - \frac{K_p}{(s+\frac{1}{T})}$$

$$y(t) = K_p(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$



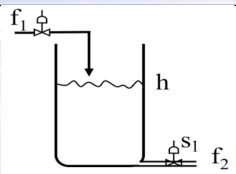
$$y(t_s) = 0.95K_p = K_p(1 - e^{-\frac{t_s}{T}}) \Rightarrow \boxed{t_s \simeq 3T}$$

$$y(T) = K_p(1 - e^{1}) = 0.63K_p$$

Ejercicio 3.1: Ganacia y dinámica 1er orden

Dado el siguiente sistema:

$$f_1 - s_1\sqrt{2gh} = A\dot{h}$$



a) Calcular la ganacia del sistema linealizado sobre el p.e. definido por F_{10}=1, s_{10}=0.3, A=1. (2 puntos)
b) Comprobarlo el resultado anterior en Simulink introduciendo varias entradas (2 puntos)
c) Sobre el sistema real comprobar el valor de h(∞) para las diversas entradas utilizadas en el apartado anterior. Comparar los resultados de ambos apartados (2 puntos)
d) Calcular el tiempo caracteristico de este sistema (2 puntos
e) Comprobar en Simulink en valor del apartado anterior (2 puntos)

Análisis dinámico de sistemas

- Introducción
- Sistemas de primer orden simple
- Sistemas de primer orden con cero
- Sitemas de segundo orden
  - Introducción
  - Sistemas sobre-amortiguados
  - Sistemas sub-amortiguados
- Caracterización de la dinámica
- Sistemas de orden superior
- Sistema reducido equivalente

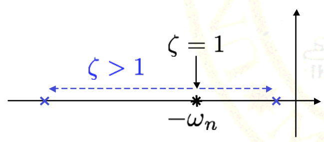
Sistema de 2º orden simple: introducción

- **Ecuación:** $\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = K_p\omega_n^2 u$

F.d.T.: $G(s) = \dfrac{K_p\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \dfrac{K_p p_1 P_2}{(s-p_1)(s-p_2)}$ siendo: $p_{1,2} = -\omega_n\zeta \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

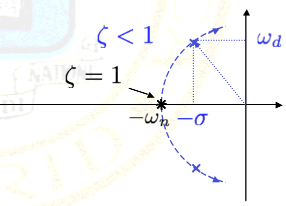
Situación de los polos:

si $\zeta \geq 1$:



si $\zeta \leq 1$:

$p_{1,2} = -\omega_n\zeta \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$

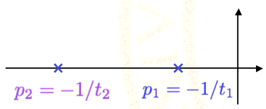


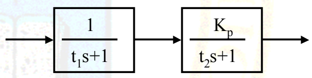
Análisis dinámico de sistemas

- Introducción
- Sistemas de primer orden simple
- Sistemas de primer orden con cero
- Sitemas de segundo orden
  - Introducción
  - Sistemas sobre-amortiguados
  - Sistemas sub-amortiguados
- Caracterización de la dinámica
- Sistemas de orden superior
- Sistema reducido equivalente

Sistemas 2° orden sobre-amortiguado (ζ>1):

$$G(s) = \frac{K_p \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K_p p_1 p_2}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{K_p}{(t_1 s+1)(t_2 s+1)}$$



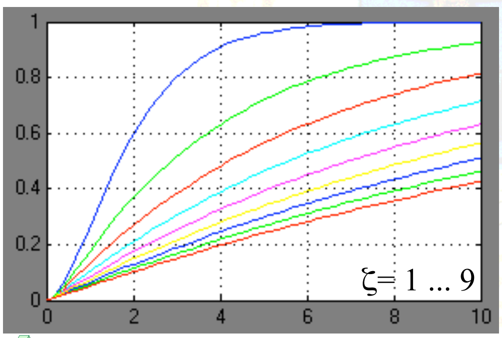


Análisis de sistemas 2° orden sobre-amortiguado (ζ>1):

Respuesta ante escalón en función de ζ : $G(s) = \frac{K_p p_1 p_2}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{K_p}{(t_1 s+1)(t_2 s+1)}$

$$Y(s) = \frac{K_p p_1 p_2}{(s-p_1)(s-p_2)}\frac{1}{s} = \frac{K_p}{s} + \frac{K_p \frac{p_2}{p_1-p_2}}{(s-p_1)} - \frac{K_p \frac{p_1}{p_1-p_2}}{(s-p_2)}$$

$$\boxed{y(t) = K_p\left(1 + \frac{p_2}{p_1-p_2}e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_1-p_2}e^{p_2 t}\right)}$$



$$t_s \gtrsim 3\max(t_1, t_2)$$

Análisis dinámico de sistemas

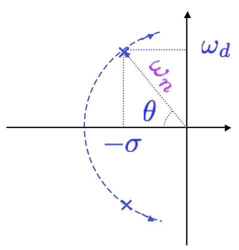
- Introducción
- Sistemas de primer orden simple
- Sistemas de primer orden con cero
- Sitemas de segundo orden
  - Introducción
  - Sistemas sobre-amortiguados
  - Sistemas sub-amortiguados
- Caracterización de la dinámica
- Sistemas de orden superior
- Sistema reducido equivalente

Análisis de sistemas 2° orden sub-amortiguado (0≤ζ<1):

$$G(s) = \frac{K_p \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K_p p_1 p_2}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{K_p \omega_n^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2}$$

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\omega_n \zeta \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -\sigma \pm j\omega_d \end{aligned}$$

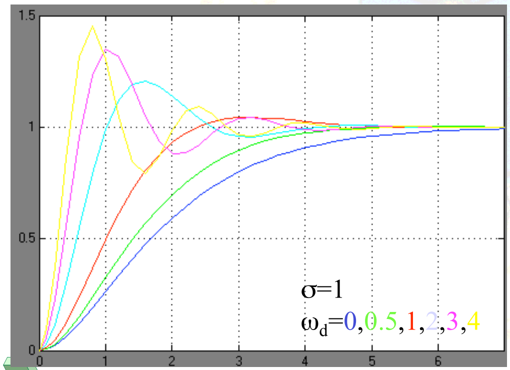
$$\left.\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2} \\ \zeta &= \frac{\sigma}{\omega_n} = cos\theta \end{aligned}\right\}$$



Análisis de sistemas 2° orden sub-amortiguado (0≤ζ<1):

Respuesta ante escalón en función de ω_d :

$$Y(s) = \frac{K_p\omega_n^2}{(s+\sigma)^2+\omega_d^2}\frac{1}{s} = \frac{K_p}{s} + K_p\frac{-(s+\sigma)-\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega_d^2} \qquad \boxed{y(t) = K_p(1-\frac{1}{sin\theta}e^{-\sigma t}sin(\omega_d t+\theta))}$$

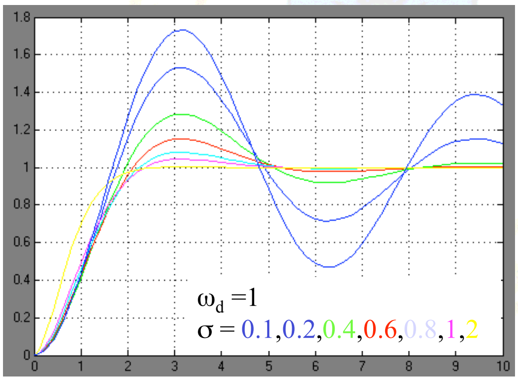


$$1-\frac{1}{\sin\theta}e^{-\sigma t_s} = 0.95 \Rightarrow \boxed{t_s \simeq 3/\sigma}$$

Análisis de sistemas 2° orden sub-amortiguado (0≤ζ<1):

Respuesta ante escalón en función de σ :

$$y(t) = K_p(1-\frac{1}{sin\theta}e^{-\sigma t}sin(\omega_d t+\theta))$$

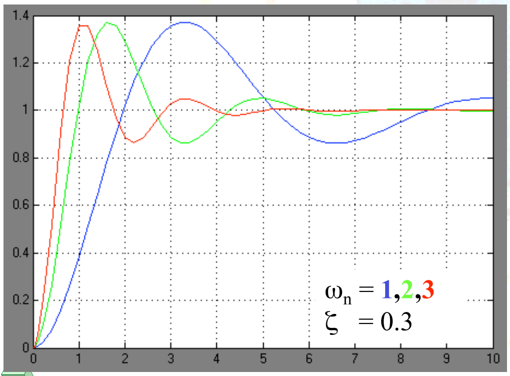


$$\boxed{t_p = \pi/\omega_d}$$

Análisis de sistemas 2º orden sub-amortiguado (0≤ζ<1):

Respuesta ante escalón en función de ω_n :

$$y(t) = K_p(1 - \frac{1}{sin\theta}e^{-\sigma t}sin(\omega_d t + \theta))$$

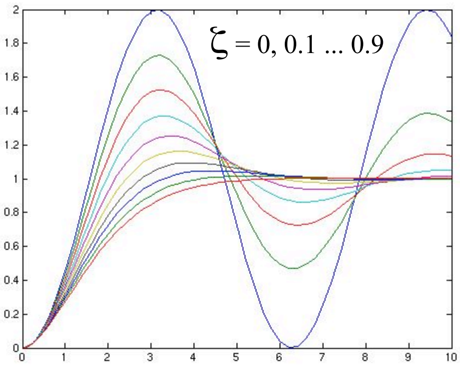


$$\boxed{M_p = \frac{y(t_p) - K_p}{K_p} = e^{-\frac{\sigma\pi}{w_d}} = e^{-\frac{\pi}{\tan\theta}}}$$

Análisis de sistemas 2º orden sub-amortiguado (0≤ζ<1):

Respuesta ante escalón en función de ζ :

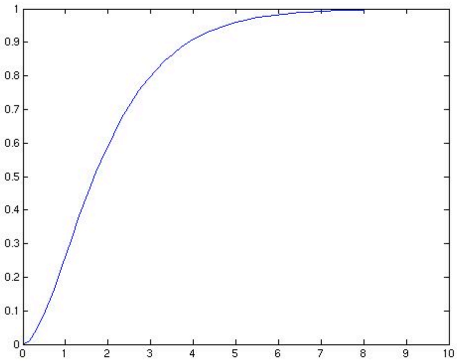
$$y(t) = K_p(1 - \frac{1}{sin\theta}e^{-\sigma t}sin(\omega_d t + \theta))$$



Análisis de sistemas 2º orden criticamente amortiguado (ζ=1):

Respuesta ante escalón:

$$Y(s) = \frac{K_p \omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s} = \frac{K_p}{s} - \frac{K_p}{s+\omega_n} - \frac{K_p \omega_n}{(s+\omega_n)^2} \qquad \boxed{y(t) = K_p(1 - e^{-\omega_n t} - t\omega_n e^{-\omega_n t})}$$

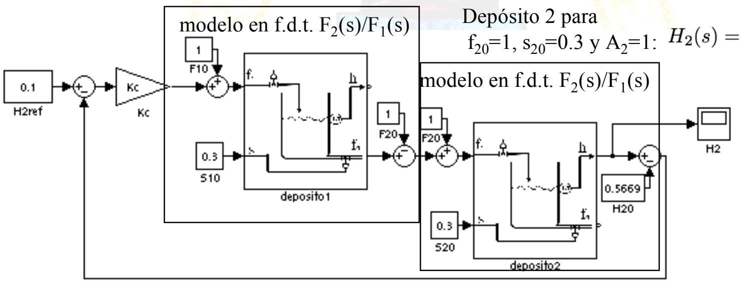


Ejercicio: sistemas 2º orden

Para el sistema de la figura:

Depósito 1 para f_{10}=1, s_{10}=0.3 y A_1=1: $F_2(s) = \dfrac{0.882}{s+0.882}F_1(s)$

Depósito 2 para f_{20}=1, s_{20}=0.3 y A_2=1: $H_2(s) = \dfrac{1}{s+0.882}F_{e2}(s)$

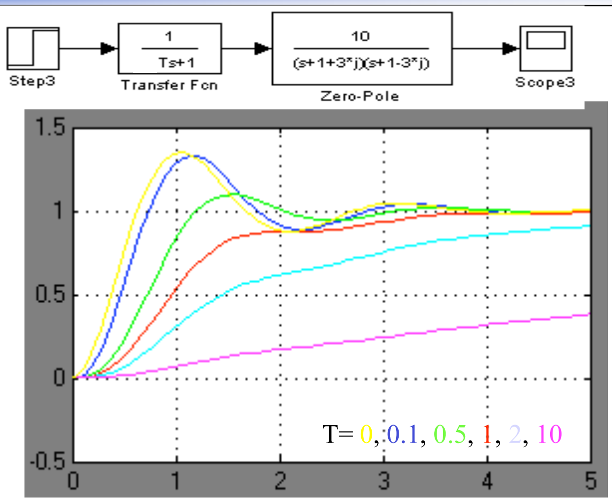


a) Obtener la función de transferencia de $H_2(s)/H_{ref}(s)$ (2,5 puntos)
b) Calcular la estabilidad y la ganacia en función de K_c (2,5 puntos)
c) Estudiar la dinámica en función de K_c (2,5 puntos)
d) Comprobar los resultados de los 2 apartados anteriores en Simulink con el sistema real (2,5 puntos)

Análisis dinámico de sistemas

- Introducción
- Sistemas de primer orden simple
- Sistemas de primer orden con cero
- Sitemas de segundo orden
- Caracterización de la dinámica
- Sistemas de orden superior
  - Efecto de un polo adicional
  - Efecto de un cero adicional
- Sistema reducido equivalente

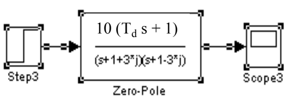
Análisis de sistemas 2° orden con polo adicional

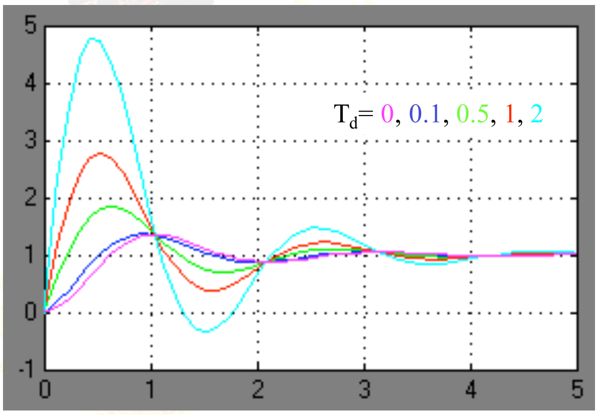


Análisis dinámico de sistemas

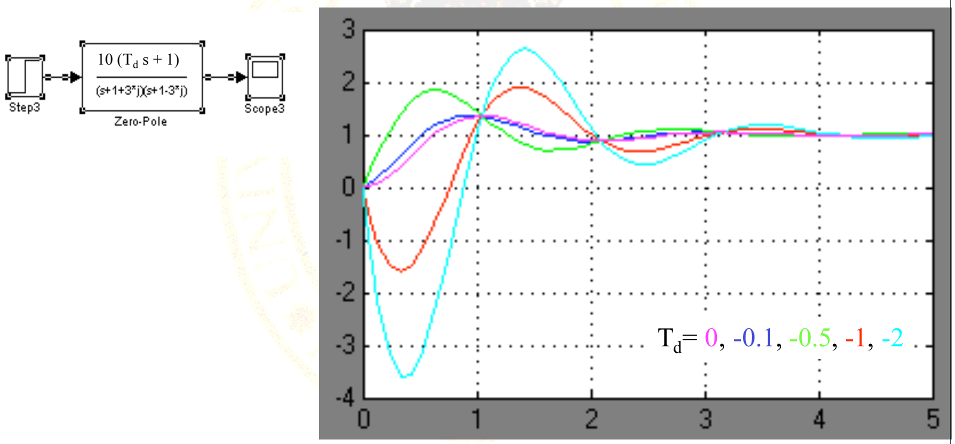
- Introducción
- Sistemas de primer orden simple
- Sistemas de primer orden con cero
- Sitemas de segundo orden
- Caracterización de la dinámica
- Sistemas de orden superior
  - Efecto de un polo adicional
  - Efecto de un cero adicional
- Sistema reducido equivalente

Análisis de sistemas 2° orden con cero adicional





Análisis de sistemas 2º orden con cero adicional en semiplano positivo

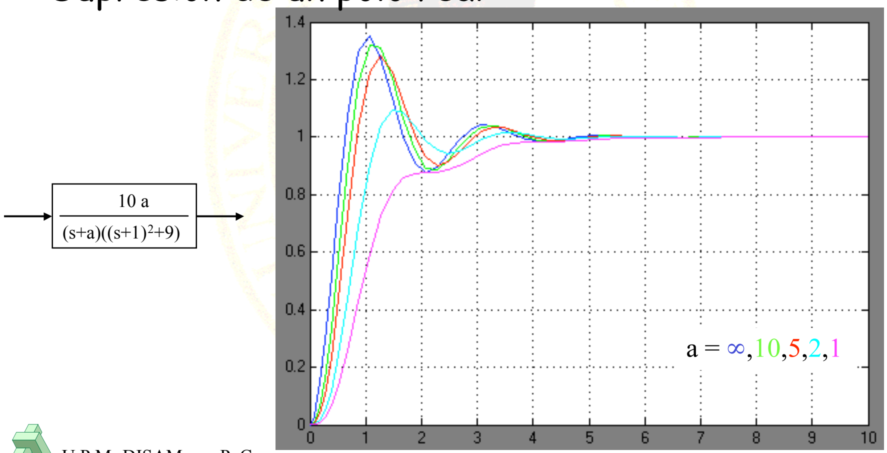


Análisis dinámico de sistemas

- Introducción
- Sistemas de primer orden simple
- Sistemas de primer orden con cero
- Sitemas de segundo orden
- Caracterización de la dinámica
- Sistemas de orden superior
- Sistema reducido equivalente
  - Supresión de polos poco significativos
  - Supresión de par polo-cero cercanos

Sistema reducido equivalente:
Supresión de polos poco significativos (1/3)

- Supresión de un polo real

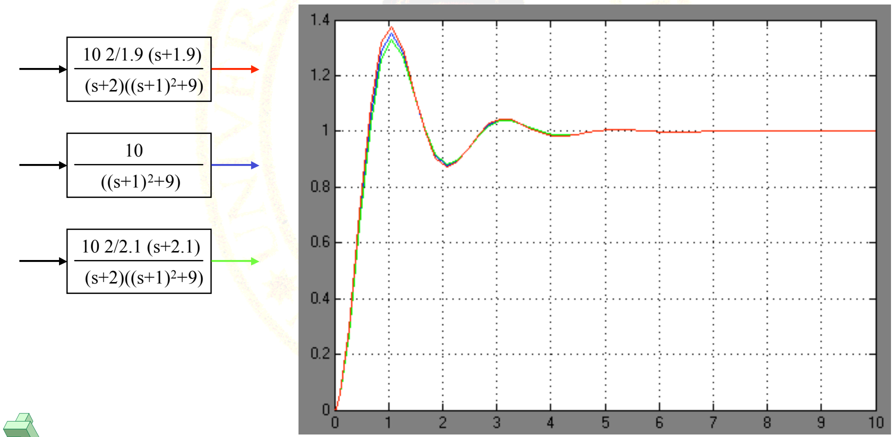


Análisis dinámico de sistemas

- Introducción
- Sistemas de primer orden simple
- Sistemas de primer orden con cero
- Sitemas de segundo orden
- Caracterización de la dinámica
- Sistemas de orden superior
- Sistema reducido equivalente
  - Supresión de polos poco significativos
  - Supresión de par polo-cero cercanos

Sistema reducido equivalente:
Supresión de par polo-cero cercanos (1/4)

- Supresión de un par polo-cero menos significativo



Sistema reducido equivalente:
Supresión de par polo-cero cercanos (2/4)

- Supresión de un par polo-cero significativo