Control de Procesos Industriales

2. Modelado lineal de sistemas

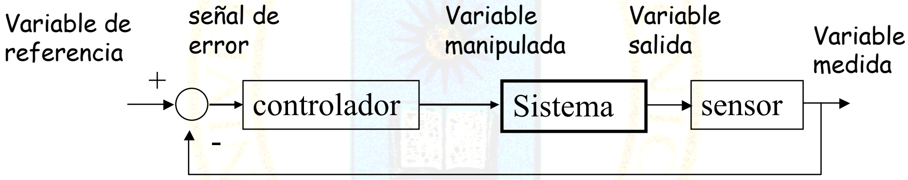
por
Pascual Campoy
Universidad Politécnica Madrid

Modelado lineal de Sistemas

- Introducción
- Función de transferencia
- Punto de equilibrio y variables incrementales
- Sistemas con múltiples entradas
- Linealización de ecuaciones
- Subsistemas y sistemas multivariables
- Simplificación diagramas de bloques

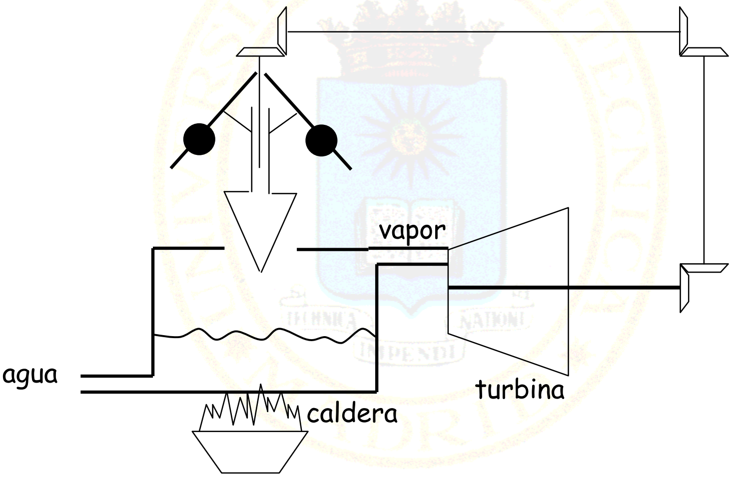
Motivación del modelado

- Control por realimentación de la salida



¿cuál es el valor adecuado de la variable manipulada para controlar la salida?

Ejemplo regulador de Watt

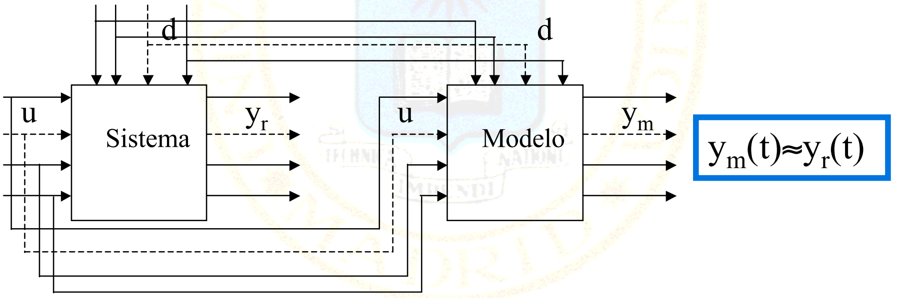


Motivación: ¿por qué el modelado?

- pregunta: ¿cuál es la entrada adecuada del sistema para controlar la salida? (¿qué tiene que hacer el controlador?)
- respuesta: depende del comportamiento del sistema ante esa entrada
- conclusión: se necesita tener un **modelo** del comportamiento del sistema

Modelado de Sistemas: ¿qué es un modelo?

Modelo de un sistema es un conjunto de operaciones que permiten obtener una buena aproximación de los valores reales de salida del sistema ante un rango de valores de las entradas



Modelado de Sistemas: ¿para qué un modelo?

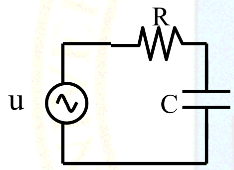
- Permite conocer de una manera fácil el comportamiento de un sistema ante diversas entradas
- Aplicaciones:
  - Aprendizaje del comportamiento de sistemas (ej. conducción de aviones, operaciones en centrales, ..)
  - Experimentación empírica del comportamiento del sistema ante nuevas entradas
  - Análisis teórico del comportamiento del sistema ante nuevas entadas

Modelado de sistemas: ejemplos

- Un circuito eléctrico
- Un motor de gasolina
- Una turbina de vapor
- Una columna de destilación
- El cuerpo humano
- La economía de un país

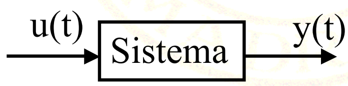
Metodologías para la obtención de un modelo

- Teórica: a partir de las ecuaciones diferenciales que relacionan las variables del sistema



$$\left.\begin{aligned} u &= Ri + u_c \\ C\dot{u}_c &= i \end{aligned}\right\} \quad u = RC\dot{u}_c + u_c$$

- Empírica: a partir del comportamiento externo entrada-salida del sistema ⇒ Identificación



$$u = T\,\dot{u}_c + u_c$$

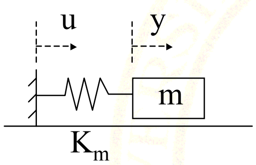
Tipos de modelo

- Según el tipo de señal (continua-discreta)
- Estático – dinámico
- Lineal – no-lineal
- Invariante – variante
- Determinista – estocástico
- Parámetros concentrados – parámetros distribuidos
- Monovariable – multivariable

Modelado lineal de Sistemas

- Introducción
- Función de transferencia
- Punto de equilibrio y variables incrementales
- Sistemas con múltiples entradas
- Linealización de ecuaciones
- Subsistemas y sistemas multivariables
- Simplificación diagramas de bloques

Ejemplo: función de transferencia de sistemas lineales



ecuación diferencial del sistema:

$$K_m(u - y) = m\ddot{y}$$

resolución mediante transformadas de Laplace:

$$K_m U(s) - K_m Y(s) = m\left[s^2 Y(s) - s\dot{y}(0) - y(0)\right]$$

suponiendo nulos los valores iniciales de las variables (elección adecuada del origen):

$$\boxed{Y(s) = \frac{K_m}{ms^2 + K_m} U(s)}$$

Función de Transferencia en sistemas lineales monovariables

ecuación lineal de un sistema monovariable
(una entrada y una salida):

$$a^n y^{(n)} + \cdots + a^1 \dot{y} + a^0 y \quad = \quad b^q u^{(q)} + \cdots + b^1 \dot{u} + b^0 u$$

tomando transformadas de Laplace:

$$(a^n s^n + \ldots + a^1 s + a^0) Y(s) = (b^q s^q + \ldots + b^1 s + b^0) U(s)$$

despejando:

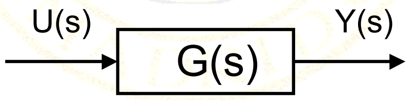
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b^q s^q + \ldots + b^1 s + b^0}{a^n s^n + \ldots + a^1 s + a^0}$$

Función de Transferencia: definición

- En sistemas monovariables, continuos, deterministas, lineales e invariantes el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la entrada es siempre fijo y se le denomina función de transferencia del sistema.

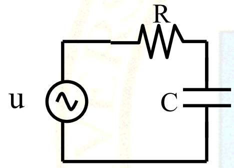
$$\boxed{Y(s) = G(s) U(s)}$$

representación gráfica:



Ejercicio 2.1

Dado el sistema:



$$u = Ri + u_c$$
$$C\dot{u}_c = i$$

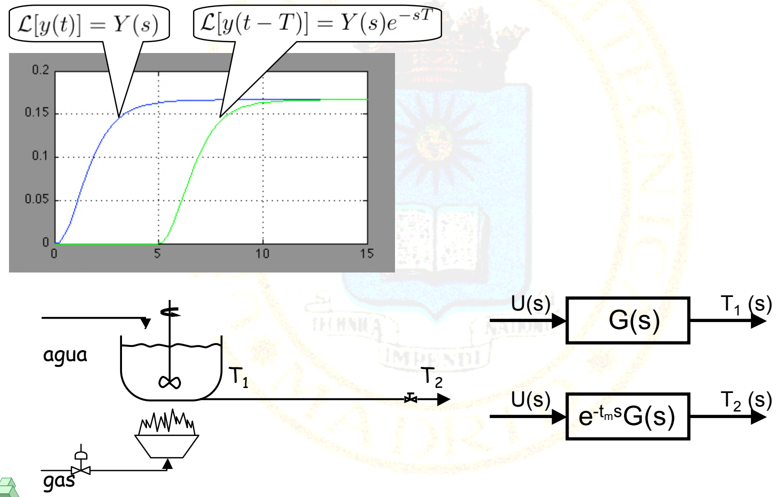
a) Obtener las f.d.t. $U_c(s)/U(s)$ e $I(s)/U(s)$ (5 puntos)

b) Implementar en Simulink la primera función de transferencia y dibujar la evolución de $u_c(t)$ cuando la $u(t)$ varía bruscamente desde un valor inicial nulo hasta 1. (5 puntos)

Ejercicios propuestos de f.d.t. sistemas lineales

- muelle lineal con rozamiento viscoso
- dos masas acopladas
- muelle torsor con par resistente, rozamiento viscoso y momento de inercia
- circuito eléctrico con R, L y C

Sistemas con retardo

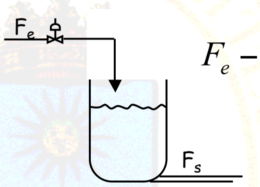


Modelado lineal de Sistemas

- Introducción
- Función de transferencia
- Punto de equilibrio y variables incrementales
- Sistemas con múltiples entradas
- Linealización de ecuaciones
- Subsistemas y sistemas multivariables
- Simplificación diagramas de bloques

Ejercicio 2.2: punto de equilibrio

Dado el siguiente sistema:



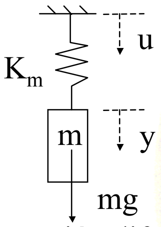
$$F_e - a\sqrt{2g}\sqrt{H} = A\dot{H}$$

a) Calcular el valor en el que se estabiliza la altura H ($\dot{H} = 0$) cuando F_e=1 (2 puntos).
b) Calcular el valor de F_e cuando la altura H está estabilizada en H=1 (2 puntos).
b) Comprbar en Simulink que para los valores de F_e y H calculados en los 2 apartados anteriores el sistema se encuentra estabilizado (3 puntos)
c) Obtener en un gráfico la evolución de H(t) cuando F_e varía del valor obtenido en a) al nuevo valor obtenido en b) (3 puntos).

Punto de equilibrio

Se define como punto de equilibrio de un sistema como aquel en el que todas sus variables se encuentran estabilizadas en unos valores constantes, es decir áquel en el que todas las derivadas de las variables son nulas. Dichos valores de las variables definen el punto de equilibrio.

Ejemplo: f.d.t. con variables incrementales



• ecuación diferencial del sistema:

$$K_m(u-y)+mg = m\ddot{y}$$

intento de resolución mediante transformadas de Laplace:

$$K_m U(s) - K_m Y(s) + \frac{1}{s} mg = m\left[s^2 Y(s) - s\dot{y}(0) - y(0)\right]$$

• ecuación diferencial de variables incrementales:

punto de funcionamiento: $K_m(u_0 - y_0) + mg = m\ddot{y}_0$

ecc . dif. variables incrementales (restando): $K_m(\Delta u - \Delta y) = m\Delta\ddot{y}$

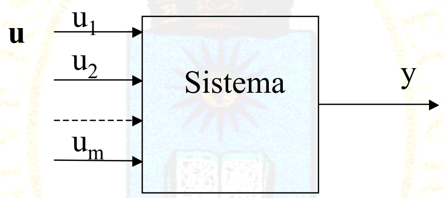
• resolución mediante transformada de Laplace:

$$\boxed{Y(s) = \frac{K_m}{ms^2 + K_m} U(s)}$$

Modelado lineal de Sistemas

- Introducción
- Función de transferencia
- Punto de equilibrio y variables incrementales
- Sistemas con múltiples entradas
- Linealización de ecuaciones
- Subsistemas y sistemas multivariables
- Simplificación diagramas de bloques

F.d.T. en sistemas multi-entradas



$$Y(s) = G_i(s)U_i(s) \qquad \text{para } u_j = 0 \quad j \neq i$$

F.d.T. en sistemas multi-entradas

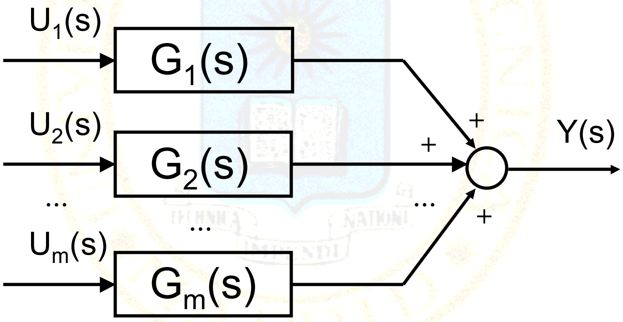
$$Y(s) = G_1(s)U_1(s) + \cdots + G_m(s)U_m(s)$$

representación matricial:

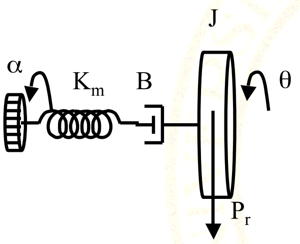
$$Y(s) = \left[G_1(s)\cdots G_n(s)\right]\begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} = \underline{G}'(s)\underline{U}(s)$$

F.d.T. en sistemas multi-entradas

representación gráfica:



Ejemplo: f.d.T. en sistemas multi-entradas:



ecuación del sistema:

$$P_r + K_m(\alpha - \theta) - B\dot{\theta} = J\ddot{\theta}$$

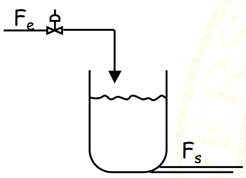
resolución mediante T.L. y valores iniciales nulos:

$$\boxed{\Omega(s) = \frac{1}{Js^2 + Bs + K_m} P_r(s) + \frac{K_m}{Js^2 + Bs + K_m} \alpha(s)}$$

Modelado lineal de Sistemas

- Introducción
- Función de transferencia
- Punto de equilibrio y variables incrementales
- Sistemas con múltiples entradas
- Linealización de ecuaciones
- Subsistemas y sistemas multivariables
- Simplificación diagramas de bloques

Ejemplo: Linealización



ecuación diferencial del sistema:

$$F_e - a\sqrt{2g}\sqrt{H} = A\dot{H}$$

desarrollo en serie de Taylor en torno a un punto de funcionamiento: $F_{e_0} - a\sqrt{2g}\sqrt{H_0} = A\dot{H}_0$

$$F_e - a\sqrt{2g}\sqrt{H_0} - a\sqrt{2g}\left.\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial H}\right|_0 (H-H_0) - a\sqrt{2g}\left.\frac{\partial^2\sqrt{H}}{\partial H^2}\right|_0 (H-H_0)^2 + \cdots = A\,\dot{H}$$

cuando $H \rightarrow H_0$ queda la ecuación lineal:

$$F_e - a\sqrt{2g}\sqrt{H_0} - a\frac{\sqrt{g/2}}{\sqrt{H_0}}\Delta H = A\dot{H}$$

restando y denominando Δvariable = variable: $F_e - a\frac{\sqrt{g/2}}{\sqrt{H_0}} H = A\dot{H}$

resultando la siguiente f.d.t.: $\boxed{H(s) = \frac{1}{As + a\frac{\sqrt{g/2}}{\sqrt{H_0}}} F_e(s)}$

F.d.T. en sistemas multi-entrada: linealización y var. incrementales (1/2)

ecuación diferencial:

$$F(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n)}, u_1, \dot{u}_1, \ldots, u_1^{(q_1)}, \ldots \quad , u_m, \dot{u}_m, \ldots, u_m^{(q_m)}) = 0$$

punto de funcionamiento:

$$F(y_0, \dot{y}_0, \ldots, a_n y_0^{(n)}, u_{10}, \dot{u}_{10}, \ldots, u_{10}^{(q_1)}, \ldots, u_{m0}, \dot{u}_{m0}, \ldots, u_{m0}^{(q_m)}) = 0$$

desarrollo en serie de Taylor:

$$F(\cdots)\big|_0 + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 (y - y_0) + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_0 (\dot{y} - \dot{y}_0) + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial u_1}\right|_0 (u_1 - u_{10}) + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial u_m^{(q_m)}}\right|_0 (u_m^{(q_m)} - u_{m0}^{(q_m)}) = 0$$

aproximando cuando $\Delta \to 0$ por los términos de 1^er^ orden, restando y tomando valores incrementales respecto al p.f.:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 \Delta y + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_0 \Delta \dot{y} + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial u_1}\right|_0 \Delta u_1 + \cdots \left.\frac{\partial F}{\partial u_1^{(q_1)}}\right|_0 \Delta u_1^{(q_1)} + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial u_m}\right|_0 \Delta u_m + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial u_m^{(q_m)}}\right|_0 \Delta u_m^{(q_m)} = 0$$

F.d.T. en sistemas multi-entrada: linealización y var. incrementales (2/2)

ecuación linealizada con variables incrementales:

$$a^n y^{(n)} + \cdots + a^1 \dot{y} + a^0 y = b_1^{q_1} u_1^{(q_1)} + \cdots + b_1^1 \dot{u}_1 + b_1^0 u_1 + \cdots + b_m^{q_m} u_m^{(q_m)} + \cdots + b_m^0 u_m$$

tomando transformadas de Laplace:

$$(a^n s^n + \ldots + a^1 s + a^0) Y(s) = (b_1^{q_1} s^{q_1} + \ldots + b_1^1 s + b_1^0) U_1(s) + \ldots + (b_m^{q_m} s^{q_m} + \ldots + b_m^0) U_m(s)$$

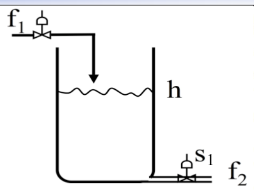
despejando Y(s):

$$Y(s) = G_1(s) U_1(s) + \cdots + G_m(s) U_m(s)$$

Ejercicio 2.3: linealización

Dado el sistema:

$$f_1 - s_1\sqrt{2gh} = A\dot{h}$$



a) Calcular las f.d.t. $H(s)/F_1(s)$ y $H(s)/S(s)$ y particularizarlas para el punto de equilibrio definido por $F_{10}=1$, $s_{10}=0.3$, $A=1$ (3 puntos)

b) Dibujar en Simulink el diagrama de bloques con f.d.t. que permite obtener obtener la evolución de $\Delta H(t)$ en función de los incrementos de F_1 y s_1. (2 puntos)

c) Dibujar la gráfica de $H(t)$ cuando F_1 pasa bruscamente de valer 1 a valer 1,5, manteniéndose s_1 constante en el valor $s_{10}=0.3$ (2 punto)

d) Superponer en la gráfica de $H(t)$ del apartado anterior (obtenida con el modelo de f.d.t.) junto con la evolución de $H(t)$ del sistema real. Analizar las diferencias observadas. (3 puntos)

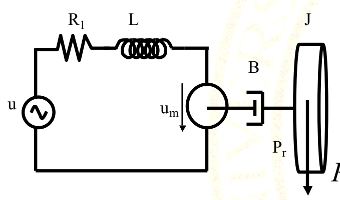
Ejercicion propuestos: Linealización

- depósito con entrada la apertura de salida
- sistema térmico
- reactor químico

Modelado lineal de Sistemas

- Introducción
- Función de transferencia
- Punto de equilibrio y variables incrementales
- Sistemas con múltiples entradas
- Linealización de ecuaciones
- Subsistemas y sistemas multivariables
- Simplificación diagramas de bloques

Ejemplo: Subsistemas (1/2)



ecuaciones:

$$u - u_m = Ri + L\frac{di}{dt}$$
$$u_m = K_1\omega$$
$$P_m = K_2 i$$
$$P_m - P_r - B\omega = J\frac{d\omega}{dt}$$

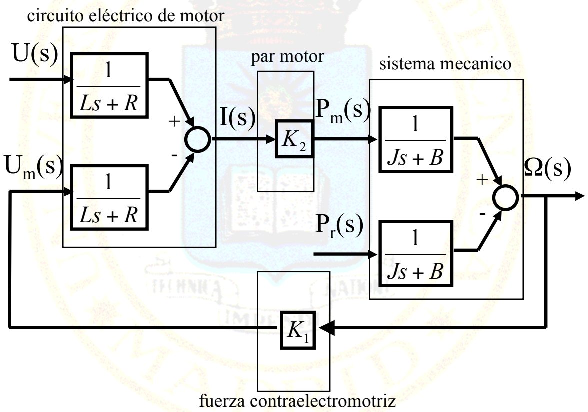
en T.L.:

$$U(s) - U_m(s) = RI(s) + LsI(s)$$
$$U_m(s) = K_1\Omega(s)$$
$$P_m(s) = K_2 I(s)$$
$$P_m(s) - P_r(s) - B\Omega(s) = Js\Omega(s)$$

sustituyendo en la última ecuación y despejando:

$$\Omega(s) = \frac{K_2}{JLs^2 + (BL+JR)s + BR + K_1K_2}U(s) - \frac{R+Ls}{JLs^2 + (BL+JR)s + BR + K_1K_2}P_r(s)$$
$$I(s) = \frac{Js+B}{JLs^2 + (BL+JR)s + BR + K_1K_2}U(s) + \frac{K_1}{JLs^2 + (BL+JR)s + BR + K_1K_2}P_r(s)$$

Ejemplo: Subsistemas (2/2)



Sistemas multivariables: ecuaciones y F.d.T. (1/2)

ecuaciones linealizadas con variables incrementales:

$$
\begin{aligned}
a_1^n y_1^{(n)} + \cdots + a_1^1 \dot{y}_1 + a_1^0 y_1 &= b_{11}^{q_1} u_1^{(q_1)} + \cdots + b_{11}^1 \dot{u}_1 + b_{11}^0 u_1 + \cdots + b_{1m}^{q_m} u_m^{(q_m)} + \cdots + b_{1m}^0 u_m \\
&\ \ \cdots \\
a_p^n y_p^{(n)} + \cdots + a_p^1 \dot{y}_p + a_p^0 y_p &= b_{p1}^{q_1} u_1^{(q_1)} + \cdots + b_{p1}^1 \dot{u}_1 + b_{p1}^0 u_1 + \cdots + b_{pm}^{q_m} u_m^{(q_m)} + \cdots + b_{pm}^0 u_m
\end{aligned}
$$

tomando transformadas de Laplace:

$$(a_1^n s^n + \ldots + a_1^1 s + a_1^0) Y_1(s) = (b_{11}^{q_1} s^{q_1} + \ldots + b_{11}^1 s + b_{11}^0) U_1(s) + \ldots + (b_{1m}^{q_m} s^{q_m} + \ldots + b_{1m}^0) U_m(s)$$

$$\ldots$$

$$(a_p^n s^n + \ldots + a_p^1 s + a_p^0) Y_1(s) = (b_{p1}^{q_1} s^{q_1} + \ldots + b_{p1}^1 s + b_{p1}^0) U_1(s) + \ldots + (b_{pm}^{q_m} s^{q_m} + \ldots + b_{pm}^0) U_m(s)$$

despejando Y(s):

$$Y_i(s) = G_{i1}(s) U_1(s) + \cdots + G_{im}(s) U_m(s) \quad i = 1..P$$

Sistemas multivariables: ecuaciones y F.d.T. (2/2)

ecuaciones de las salidas en función de las entradas:

$$Y_1(s) = G_{11}(s)\, U_1(s) + \ldots + G_{1m}(s)\, U_m(s)$$
$$\ldots$$
$$Y_p(s) = G_{p1}(s)\, U_1(s) + \ldots + G_{pm}(s)\, U_m(s)$$

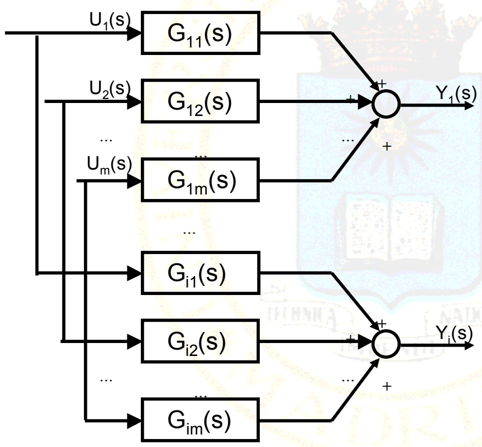
utilizando la notación matricial:

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ \ldots \\ Y_p(s) \end{pmatrix} \quad \mathbf{U}(s) = \begin{pmatrix} U_1(s) \\ \ldots \\ U_m(s) \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) \ldots & G_{1m}(s) \\ \ldots & \\ G_{p1}(s) \ldots & G_{pm}(s) \end{pmatrix}$$

resulta:

$$\boxed{\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\, \mathbf{U}(s)}$$

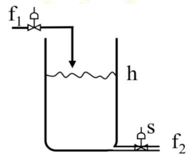
Sistemas multivariables: representación gráfica



Ejercicio:
Sistema multivariable

Dado el sistema del ejemplo anterior:

$$
\begin{aligned}
A\dot{h} &= f_1 - f_2 \\
f_2 &= s_1\sqrt{2gh}
\end{aligned}
$$



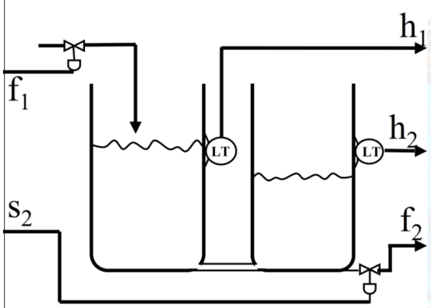
a) Calcular la matriz de f.d.t. de $[h(s)\ f_2(s)]^T$ en función de $[f_1(s)\ s_1(s)]^T$ y particularizarlas para el punto de equilibrio definido por $f_{10}=1$, $s_{10}=0.3$, A=1 (3 puntos)

a) Dibujar en Simulink el diagrama de bloques con f.d.t. que permite obtener obtener la evolución de $\Delta h(t)$ y de $\Delta f_2(s)$ en función de los incrementos de f_1 y s_1. (2 puntos)

b) Dibujar la gráfica de h(t) cuando f_1 pasa bruscamente de valer 1 a valer 1,5 y s_1 pasa de valer 0.3 a valer 0.2 (2 puntos)

c) Superponer en la gráfica de h(t) del apartado anterior (obtenida con el modelo de f.d.t.) junto con la evolución de h(t) del sistema real. Analizar las diferencias observadas. (3 puntos)

Trabajo:
depósitos comunicados



a) Calcular las f.d.t. $[H_1(s)\ H_2(s)]$ respecto de $[F_1(s)\ S_2(s)]$

b) Calcular la $H_2(s)$ en función de $F_1(s)$ y $S_s(s)$

c) Calcular las ganacias estáticas y los tiempos cárácterísticos de dichas f.d.t.

$$
\begin{aligned}
A_1\dot{h}_1 &= f_1 - s_1\sqrt{2g(h_1-h_2)} \\
A_2\dot{h}_2 &= s_1\sqrt{2g(h_1-h_2)} - s_2\sqrt{2gh_2}
\end{aligned}
$$

Trabajo: depósitos comunicados

- Usando Simulink dar valores coherentes al sistema de los depositos para su funcionamiento en un p.e.
  - a) para los dos depositos con áreas muy distintas y
  - b) muy parecidas
- Obtener las f.d.t. de los sistemas en torno a ese p.e.
  - a) a partir de las ecuaciones
  - b) mediante identificación
- Comparar en Simulink la evolucion de las alturas de los tres sistemas siguientes; real, f.d.t. a partir de las ecuaciones y f.d.t. apartir de identificación