# Modelo de estado

- Concepto de estado
- Ecuaciones del modelo de estado
- Representación gráfica de sistemas lineales
- Transformaciones lineales del estado
- Métodos de obtención modelos de estado
- F.d.T. y modelo de estado



# Concepto de estado (1/2)

- Definición:

  es la cantidad **mínima de información necesaria** para **conocer cualquier variable** del sistema en cualquier otro instante posterior, conocida la entrada entre ambos instantes
- Nomenclatura:

  viene expresado mediante el vector de **variables de estado** $\mathbf{x}(t)$ de dimensión n

$$\mathbf{y}(t) = \Psi(t; t_0 ; \mathbf{x}(t0); \mathbf{u}(\tau)) \qquad t_0 < \tau \leq t$$

# Concepto de estado (2/2)

- Espacio de estado:
  es el espacio vectorial en el que el que toma valores el vector de estado **x**(t)

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t;\, t_0\, ;\, \mathbf{x}(t0);\, \mathbf{u}(\tau)) \qquad t_0 < \tau \leq t$$

- Las trayectorias del vector de estado cumplen:
  - Continuidad, unicidad, transitividad



# Ecuaciones del modelo de estado

- Ecuación de salida:

$$\mathbf{y}(t)=g(t,\, \mathbf{x}(t),\, \mathbf{u}(t))$$

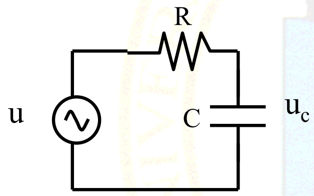
- Ecuación diferencial con dinámica del estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=f(t,\, \mathbf{x}(t),\, \mathbf{u}(t))$$

- Dimensiones de los vectores
  - n: número de variables de estado, dimensión de **x**
  - m: número de entradas, dimensión de **u**
  - p: número de salidas, dimensión de **y**

# Ejercicio 1.1

1.-razonar cuantas variables de estado tiene este sistema



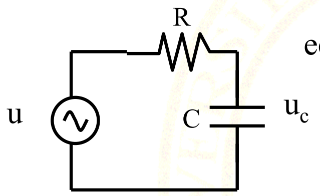

2.- razonar si las siguientes variables pueden ser variables de estado: $u$, $u_c$, $u_R$, $i$

3.- razonar si existen y cuales son otras posibles variables de estado

4.- escribir las ecuaciones de estado del sistema



# Solución ejercicio 1.1




ecuación dinámica estado

$$\dot{u}_c = -\frac{1}{RC}u_c + \frac{1}{RC}u$$

ecuación salida:

$$\begin{bmatrix} u_c \\ u_R \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1/R \end{bmatrix} u_c + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/R \end{bmatrix} u$$

# Ecuaciones del modelo de estado: sistemas lineales

- Definición de sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x}_1(t_0) \xrightarrow{\mathbf{u}_1(\tau)} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t_0) \xrightarrow{\mathbf{u}_2(\tau)} \mathbf{y}_2(t) \end{array}\right\} \Longrightarrow a\mathbf{x}_1(t_0)+b\mathbf{x}_1(t_0) \xrightarrow{a\mathbf{u}_1(\tau)+b\mathbf{u}_1(\tau)} a\mathbf{y}_1(t)+b\mathbf{y}_2(t)$$

- Ecuaciones de estado de sistemas lineales:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{array}\right\}$$

dimensiones:

$\mathbf{A}_{nxn}$ $\mathbf{B}_{nxm}$
$\mathbf{C}_{pxn}$ $\mathbf{D}_{pxm}$



# Ecuaciones del modelo de estado: sistemas lineales invariante

- Definición de sistema invariante:

$$\mathbf{x}(t_0)=x_0 \xrightarrow{\mathbf{u}_1(\tau)\ \ t_0<\tau\leq t} \mathbf{y}_1(t) \Longrightarrow \mathbf{x}(t_0+T)=x_0 \xrightarrow[t_0<\tau\leq t]{\mathbf{u}(\tau+T)=\mathbf{u}_1(\tau)} \mathbf{y}(t+T)=\mathbf{y}_1(t)$$

- Ecuaciones de estado de sistemas invariantes:

$\mathbf{y}(t)=g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ $\dot{\mathbf{x}}(t)=f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$

- Ecuaciones de estado de sistemas lineales invariantes:

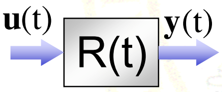
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\ \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\ \mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\ \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\ \mathbf{u}(t)$$

# Representación gráfica de sistemas lineales (1/2)

- integrador

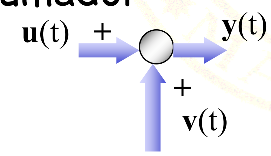

$$\mathbf{y}(t)=\int \mathbf{u}(t)$$

- multiplicador por una matriz




$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)$$

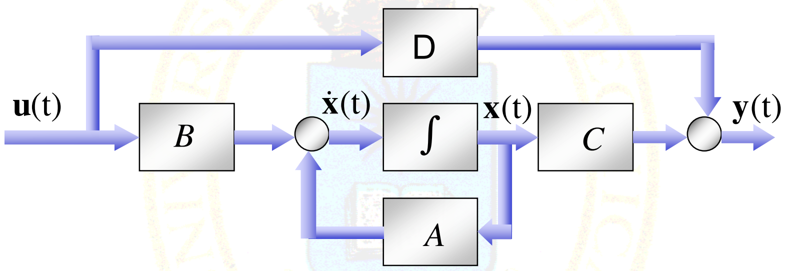
- sumador




$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t)$$

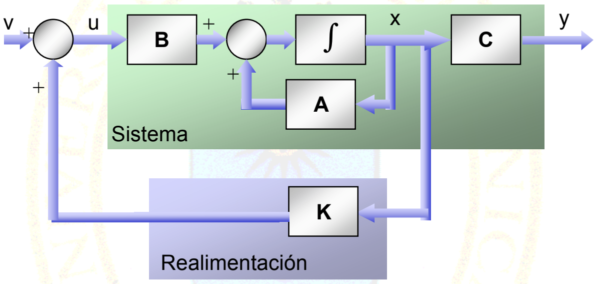


# Representación gráfica de sistemas lineales (2/2)




$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

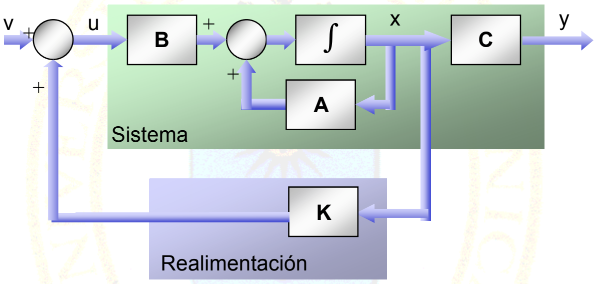
# Ejercicio 1.2




- ¿cuántas variables de estado?
- Elegir variables de estado
- Calcular las matrices del m.e.: $A_r$, $B_r$ y $C_r$



# Solución ejercicio 1.2




- ¿cuántas variables de estado? n
- Elegir variables de estado. x
- Calcular las matrices del m.e.: $A_r=A+BK$, $B_r=B$ y $C_r=C$

# Modelo de estado

- Concepto de estado
- Ecuaciones del modelo de estado
- Representación gráfica de sistemas lineales
- Transformaciones lineales del estado
- Métodos de obtención modelos de estado
- F.d.T. y modelo de estado



# Transformaciones lineales en el espacio de estado

- Cambio de base: $x(t) = T\tilde{x}(t)$

$$\tilde{x}(t) = T^{-1}x(t)$$

- Ecuaciones estado en la nueva base:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \underbrace{T^{-1}AT}_{\tilde{A}}\tilde{x}(t) + \underbrace{T^{-1}B}_{\tilde{B}}u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{CT}_{\tilde{C}}\tilde{x}(t) + Du(t)$$

# Modelo de estado

- Concepto de estado
- Ecuaciones del modelo de estado
- Representación gráfica de sistemas lineales
- Transformaciones lineales del estado
- Métodos de obtención modelos de estado
- F.d.T. y modelo de estado



# Métodos para la obtención de modelos de estado

Significado físico

- Variables de estado como magnitudes físicas

---

- Variables de estado como salida de integradores

---

- Variables de estado de fase
- Variables de estado de Jordan

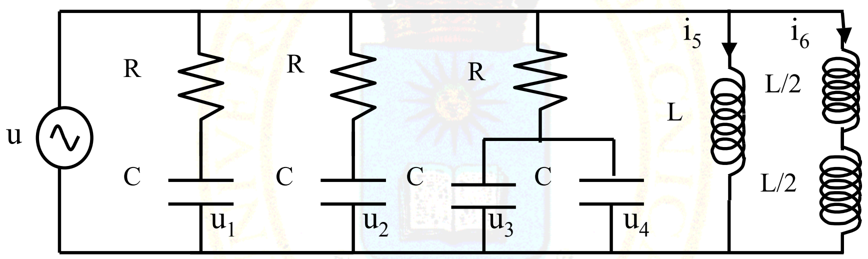
ventajas matemáticas del modelo

# Variables de estado como magnitudes físicas

- Son v.e. las magnitudes físicas que almacenan la energía del sistema, no pudiendo presentar discontinuidades.
- Ejemplos:
  - Sistemas hidraúlicos:
    - altura de los depósitos (energia potencial)
  - Sistemas eléctricos:
    - tensiones en los condensadores
    - intensidades en las bovinas
  - Sistemas mecánicos:
    - posición (energía potencial)
    - velocidad (energía cinética)
  - Sistemas térmicos:
    - temperatura (energía térmica)

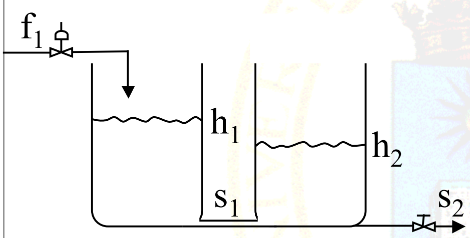


# V.e. Como magnitudes físicas




- V.e.: $u_1$, $u_2$, $u_3$, $i_5$, $i_6$

# Problema 1




$$
\begin{aligned}
A_1\dot{h}_1 &= f_1 - s_1\sqrt{2g(h_1-h_2)} \\
A_2\dot{h}_2 &= s_1\sqrt{2g(h_1-h_2)} - s_2\sqrt{2gh_2}
\end{aligned}
$$

1. Hallar un modelo de estado no-lineal
2. Hallar un modelo de estado linealizado en torno a un punto de equilibrio elegido
3. Discutir variables de estado cuando s1→∞



# Problema 1: solución

1.- Modelo de estado no lineal:

$$
\begin{aligned}
A_1\dot{h}_1 &= f_1 - s_1\sqrt{2g(h_1-h_2)} \\
A_2\dot{h}_2 &= s_1\sqrt{2g(h_1-h_2)} - s_2\sqrt{2gh_2}
\end{aligned}
$$

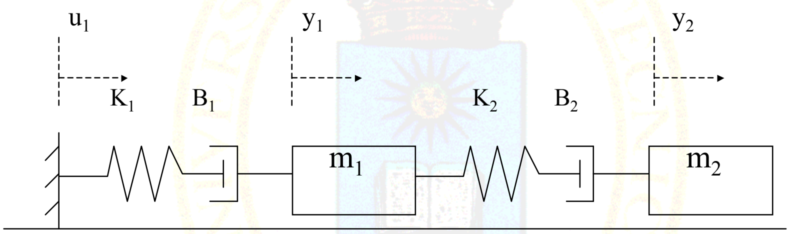
2.- Modelo de estado lineal:

$$
\begin{aligned}
A_1\dot{h}_1 &= -\left.\frac{s_1\sqrt{2g}}{2\sqrt{(h_1-h_2)}}\right|_0 h_1 + \left.\frac{s_1\sqrt{2g}}{2\sqrt{(h_1-h_2)}}\right|_0 h_2 + f_1 \\
A_2\dot{h}_2 &= \left.\frac{s_1\sqrt{2g}}{2\sqrt{(h_1-h_2)}}\right|_0 h_1 - \left.\left(\frac{\sqrt{2g}s_1}{2\sqrt{(h_1-h_2)}} + \frac{\sqrt{2g}s_2}{2\sqrt{h_2}}\right)\right|_0 h_2 - \left.\sqrt{2gh_2}\right|_0 s_2
\end{aligned}
$$

3.- Si $s_1 \rightarrow \infty$ se tiene una única variable de estado:

$$
(A_1 + A_2)\dot{h} = f_1 - s_2\sqrt{2gh}
$$

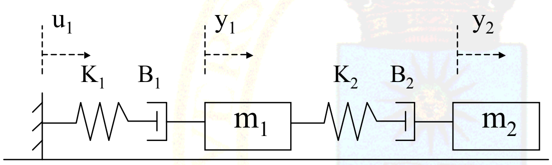
# Problema 2




- Hallar un modelo de estado
- Discutir el estado cuando la rigidez del muelle 2 es infinita (ambas masas solidarias)

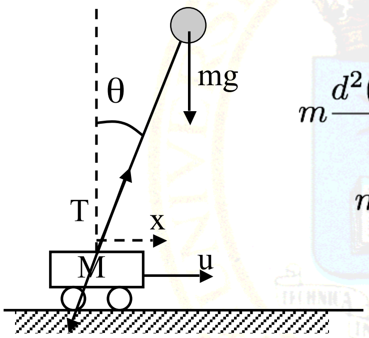


# Problema 2: solución




$$K_1(u_1 - y_1) + K_2(y_2 - y_1) - B_1(\dot{y}_1 - \dot{u}_1) - B_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = m_1\ddot{y}_1$$
$$-K_2(y_2 - y_1) + B_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = m_2\ddot{y}_2$$

# Problema 3




$$m\frac{d^2(x+l\sin\theta)}{dt^2} = T\sin\theta$$
$$m\frac{d^2(l\cos\theta)}{dt^2} = T\cos\theta - mg$$
$$M\ddot{x} = u - T\sin\theta$$

- Hallar un modelo de estado no lineal y otro linealizado en torno a $\theta_0=0$ y $x_0=0$



# Variables de estado como salida de integradores

- Si las ecuaciones del sistema se pueden escribir como ecuaciones integrales, las salidas de los integradores son las variables de estado.

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$
$$x(t) = \int f(t, x(t), u(t))$$

y por tanto representan las condiciones iniciales de necesarias para su resolución

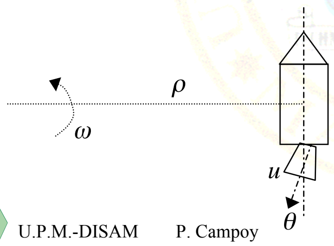
# Ejemplos 2.3

- En sistemas lineales:

$$\dot{y}(t) + by(t) = K\dot{u}(t) + Kau(t)$$

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = K\dot{u}(t) + Kcu(t)$$

- En sistemas no-lineales:




$$\dot{\omega} = -a\omega + K_{\omega}\rho u \cos\theta$$

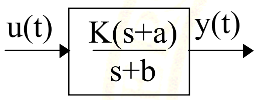
$$m\ddot{\rho} = -\rho\omega^2 + K_p u \sin\theta$$

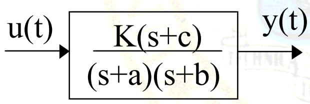


# Variables de estado como salida de sistemas sencillos

- Descomponer el sistema total en sistemas de orden bajo, eligiendo entonces como v.e. las salidas y derivadas de la salida que no puedan presentar discontinuides.

# Ejemplos






# Variables de estado de fase

- Sistema monovariable: $$y = \frac{b_n s^n + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} u$$
- Elección de v.e.: $$x_1 = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} u$$
$$x_2 = \dot{x}_1 \quad x_3 = \dot{x}_2 \quad \cdots \quad x_n = \dot{x}_{n-1}$$
- Modelo de estado: $$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & \cdots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + b_n u$$

# Variables de estado de Jordan (1/2)

- Sistema monovariable con polos simples

$$y = \left( b_n + \frac{\rho_1}{s-\lambda_1} + \frac{\rho_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{\rho_n}{s-\lambda_n} \right) u$$

- Elección v.e.:

$$x_1 = \frac{1}{s-\lambda_1} u \quad \cdots \quad x_n = \frac{1}{s-\lambda_n} u$$

- Modelo de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + b_n u$$



# Variables de estado de Jordan (2/2)

- Sistema monovariable con polos multiples

$$y \;=\; \left( b_n + \frac{\rho_1}{(s-\lambda_1)^r} + \cdots + \frac{\rho_{r-1}}{(s-\lambda_1)^2} + \frac{\rho_r}{s-\lambda_1} + \frac{\rho_{r+1}}{-\lambda_{r+1}} + \cdots + \frac{\rho_n}{s-\lambda_n} \right) u$$

- Elección v.e.:

$$x_1 = \frac{1}{(s-\lambda_1)^r} u = \frac{1}{s-\lambda_1} x_2 \quad \cdots \quad x_{r-1} = \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} u = \frac{1}{s-\lambda_1} x_r \quad x_r = \frac{1}{s-\lambda_1} u$$

- Modelo de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{r-1} & \rho_r & \rho_{r+1} & \cdots & \rho_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + b_n u$$

# Comandos Matlab

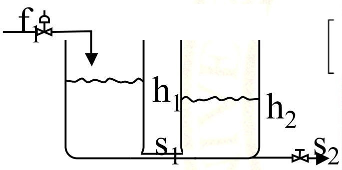
- >eig(A)
- >pc=poly(A)
- >roots(pc)

- [T,J]=jordan(A)



# Ejercicio 1.3

Dado el sistema de la figura, cuyo modelo de estado linealizado en torno a p.e. s1=0.3, A1=2, A2=1,5, s2=0.25 y F1=1 es:




$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.441 & 0.441 \\ 0.588 & -1.078 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \end{bmatrix}$$

a) Hallar el modelo de estado en variables de Jordan (2 puntos)
b) Hallar la matriz de cambio de base entre ambos modelos (2 puntos)
c) Hallar el modelo de estado en variables de fase (2 puntos)
d) Hallar la matriz de cambio de base entre el modelo en variables de fase y variables de Jordan. (2 puntos)
e) Partiendo de los resultados anteriores calcular la matriz de cambio de base entre el modelo original y el modelo en variables de fase (2 puntos)

# Ejercicio 1.3: solución

a) Hallar el modelo de estado en variables de Jordan (2 puntos)
b) Hallar la matriz de cambio de base entre ambos modelos (2 puntos)

>> A=[-0.441 0.441; 0.588 -1.078], B=[0.5; 0]

>> [Tjo,J]=jordan(A)

$$T_{jo} = \begin{matrix} 0.7651 & 0.2349 \\ 0.4895 & -0.4895 \end{matrix} \qquad J = \begin{matrix} -0.1589 & 0 \\ 0 & -1.3601 \end{matrix}$$

c) Hallar el modelo de estado en variables de fase (2 puntos)

>> Pca=poly(A)   Pca = 1.0000 1.5190 0.2161

>> Af=[0 1; -0.2161 -1.519], Bf=[0;1]

d) Hallar la matriz de cambio de base entre el modelo en variables de fase y variables de Jordan. (2 puntos)

>>[Tjf,J]=jordan(Af)

$$T_{jf} = \begin{matrix} 1.1323 & -0.1323 \\ -0.1799 & 0.1799 \end{matrix}$$

e) Partiendo de los resultados anteriores calcular la matriz de cambio de base entre el modelo original y el modelo en variables de fase (2 puntos)

>> Tfo=inv(Tjf)*Tjo

$$T_{fo} = \begin{matrix} 1.1250 & -0.1250 \\ 3.8460 & -2.8460 \end{matrix}$$



# Modelo de estado

- Concepto de estado
- Ecuaciones del modelo de estado
- Representación gráfica de sistemas lineales
- Transformaciones lineales del estado
- Métodos de obtención modelos de estado
- F.d.T. y modelo de estado

# Relación entre la f.d.t. y el modelo de estado: obtención

- Matriz de funciones de transferencia,
  (sólo existe en sist. lineales invariantes):

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s)$$

representación externa del sistema:
relación entrada-salida

- Modelo de estado de sist. lineales invariantes:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t)$$

representación interna del sistema:
dinámica del estado

- Relación, tomando transformaddas de Laplace:

$$\boxed{\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}}$$



# Relación entre la f.d.t. y el modelo de estado: conclusiones

$$\boxed{\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}}$$

- Existe una única matriz *G*(s) para todas las matrices del modelo de estado de un sistema
- El polinomio característico es: P(s)= det[sI-**A**]
  - P(s)=0, polos del sistema son valores propios de A
  - **G**(s) tiene n polos determinados por la matriz A, **excepto** cancelaciones con algún cero del sistema
- Los ceros del sistema vienen determinados por las matrices A, B, C y D.

# Comando Matlab

> [num,den]=ss2tf(A,B,C,D)