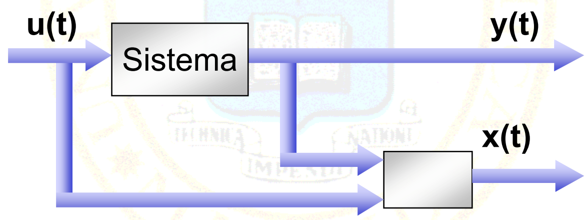
Observabilidad

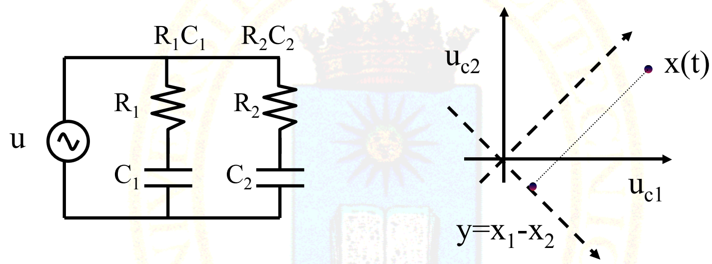
- Introducción
- Definiciones
- Observabilidad en sistemas lineales
- Observabilidad en sistemas lineales e invariantes.
  - Subespacio no-observable
  - Subsistema observable
  - Separación del subsistema controlable y observable

Introducción

- Concepto: "observar" el estado del sistema a partir de su relación entrada-salida.



Observabilidad: ejemplo



- ¿se puede conocer x(t) conocido $y(t)=x_1(t)-x_2(t)$?
- en el supuesto $R_1C_1 \neq R_2C_2$: ¿se puede conocer $x(t_0)$ conocido $y(\tau)=x_1(\tau)-x_2(\tau)$ para $t_0<\tau\leq t$? o bien ¿cada estado inicial distinto genera una salida distinta?
- ¿y si $y(t)=3x_1(t)-5x_2(t)$?
- ¿y para $R_1C_1=R_2C_2$? ¿existen estados en los que $y(t)=0$?

Definiciones: (1/1)
observabilidad de un punto del estado

- x_0 es observalable en $[t_o,t_1]$, si y sólo si partiendo de $x(t_0)=x_0$, el conocimiento de la entrada $u(\tau)$ y la salida $y(\tau)$ en el intervalo $t_o \leq \tau \leq t_1$, permite asegurar que $x(t_0)=x_0$

- x_0 es observalable, si y sólo si para todo instante inicial t_0 existe un intervalo finito $[t_o,t_1]$, tal que x_0 es observable en $[t_o,t_1]$.

Definiciones: (1/2)
observabilidad de un sistema

- Un sistema es observalable en $[t_o,t_1]$, si y sólo si todos los puntos del espacio de estado son observalables en $[t_o,t_1]$,

- Un sistema es observalable si y sólo si todos los puntos del espacio de estado son observalables

Observabilidad de sistemas lineales: introducción

- En un sistema lineal e invariante:

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

agrupando términos que no dependen de x_0:

$$\breve{y}(t) \equiv y(t) - \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0$$

con lo que el objetivo de la observabilidad es el cálculo de x_0 a partir de $\breve{y}(t)$ o salida del sistema ante entrada nula

Observabilidad de sistemas lineales: teorema

- Dado el sistema:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

es observalable en $[t_o,t_1]$ si y solo si el gramiano de observabilidad $V(t_o,t_1)$ es invertible, definido como:

$$V(t_1,t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t_0)d\tau$$

Observabilidad de sistemas lineales: demostración

$\exists\, V^{-1}(t_1,t_0) \Leftrightarrow$ sistema observalable en $[t_0,t_1]$

- suficiente ($\Rightarrow$) :

$$x_0 = V^{-1}(t_1,t_0)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)\breve{y}(\tau)d\tau$$

◇ por tanto se puede calcular el estado inicial x_0

- necesaria ($\Leftarrow$):

si no existe $V^{-1}(t_1,t_0)$ entonces partiendo de $x(t_0)$ igual al el vector propio de V asociado al valor propio 0, se obtiene: $\breve{y}(t_1) = 0$

◇ por tanto existen estados cuya salida es indistinguible con la salida desde el origen

Observabilidad de sistemas lineales: estados no-observables

- definición: estados no-observables son aquellos a partir de los cuales su salida es permanentemente nula ante entrada nula
  $\breve{y}(t) = 0 \quad \forall t > t_0$
- si existen estados no-observables, ningún estado del sistema es observable
- si el sistema no es observable, existen estados no-observables

Observabilidad de sistemas lineales e invariantes: teorema

- Dado el sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

es observable si y solo si la matriz P es de rango máximo (n).

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Observabilidad de sistemas lineales e invariantes: demostración

rango (P) = n ⇔ sistema es observable

- necesario (⇐):

$$\breve{y}(t) = \left[\alpha_0(t)C + \alpha_1(t)CA + \ldots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}\right] x_0$$

◇por tanto si el rango(P)<n, existen estados iniciales x_0, tales que $\breve{y}(t) = 0$

- suficiente (⇒):

si no es observable existen vectores ⊥ a P

◇ por tanto si no es observable el rango(P) < n

Sistemas lineales invariantes: Suespacio no-observable

- Todos los puntos no-observables forman un subespacio, denominado subespacio no-observable
- El subespacio no-observable esta generado por el nucleo de P (vectores x/ Px=0) de dimensión n-r_P, siendo r_P=rango(P)

Subsistema no-observable: lema

Dado un sistema lineal e invariante con dimensión del subespacio no-observable $n-r_P<n$, existe una matriz de cambio de base T tal que:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa} & 0 \\ \tilde{A}_{ba} & \tilde{A}_{bb} \end{bmatrix} \qquad \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} \tilde{C}_a & 0 \end{bmatrix}$$

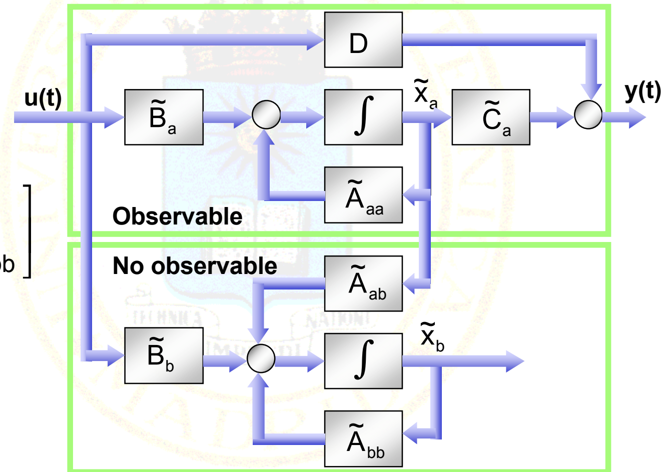
en el que el subsistema $(\tilde{A}_{aa} \tilde{C}_a)$ de dimensión $r_P x r_P$ es observable

siendo $T=[T_a T_b]$, donde T_b es una base del subespacio no-observable del sistema

Subsistema observable: representación gráfica

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa} & 0 \\ \tilde{A}_{ba} & \tilde{A}_{bb} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_a & 0 \end{bmatrix}$$



Separación del subsistema controlable y observable: lema

Dado un sistema lineal e invariante con rango(Q)=r_Q y rango(P)=r_P, existe una matriz de cambio de base T tal que:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa} & 0 & \tilde{A}_{ac} & 0 \\ \tilde{A}_{ba} & \tilde{A}_{bb} & \tilde{A}_{bc} & \tilde{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{dc} & \tilde{A}_{dd} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_a \\ \tilde{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} \tilde{C}_a & 0 & \tilde{C}_c & 0 \end{bmatrix}$$

donde:

- el subsistema $\left[\begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa} & 0 \\ \tilde{A}_{ba} & \tilde{A}_{bb} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{B}_a \\ \tilde{B}_b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{C}_a & 0 \end{bmatrix}\right]$ de dimensión $r_Q x r_Q$ es controlable
- el subsistema $\left[\begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa} & \tilde{A}_{ac} \\ 0 & \tilde{A}_{cc} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{B}_a \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{C}_a & \tilde{C}_c \end{bmatrix}\right]$ de dimensión $r_P x r_P$ es observable
- el subsistema $[\tilde{A}_{aa}, \tilde{B}_a, \tilde{C}_a]$ es controlable y observable

Separación del subsistema controlable y observable: matriz T

siendo la matriz del cambio de base:

$T=[T_a T_b\ T_c\ T_d]$

donde:

$T_a\ T_b$ es una base del subespacio controlable

$T_b\ T_d$ es una base del subespacio no-observable

Separación del subsistema controlable y observable: gráfica

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa} & 0 & \tilde{A}_{ac} & 0 \\ \tilde{A}_{ba} & \tilde{A}_{bb} & \tilde{A}_{bc} & \tilde{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{dc} & \tilde{A}_{dd} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_a \\ \tilde{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} \tilde{C}_a & 0 & \tilde{C}_c & 0 \end{bmatrix}$$