Solución de la ecuación de estado en modelos lineales

- Solución de la ecuación homogénea
  - Matriz de transición
  - Propiedades de la matriz de transición
- Solución de la ecuación completa
- Cálculo de la matriz de transición
  - casos simplificables
  - método de Cayley-Hamilton
  - método de Jordan
  - mediante transformadas de Laplace
  - nuemricamente mediante Matlab

Solución de la ecuación homogénea

- ecuación homogénea:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \qquad \text{c.i.}: x(t_0) = x_0$$

- resolución por aproximaciones sucesivas (método Peano-Baker)

$$\varphi_0(t) = x_0$$

$$\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\varphi_{k-1} d\tau$$

$$x(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t)$$

$$x(t) = [\ I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1)d\tau_1 d\tau + \dots$$

$$\dots \int_{t_0}^{t} A(\tau)\int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1)\dots\int_{t_0}^{\tau_{k-1}} A(\tau_{k-1})d\tau_{k-1}\dots d\tau_1 d\tau + \dots\ ]x_0$$

$$\boxed{x(t) = \Phi(t,t_0)x_0}$$

Propiedades de la matriz de transición

- derivada temporal $\dfrac{d\Phi(t,t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t,t_0)$
- valor en t_0 $\Phi(t_0,t_0) = I$
- transitividad $\Phi(t_2,t_0) = \Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0)$
- inversa $\Phi(t,t_0)^{-1} = \Phi(t_0,t)$
- cambio de base en el espacio de estado:

$$\tilde{\Phi}(t,t_0) = T^{-1}\Phi(t,t_0)T$$

Solución de la ecuación de estado en modelos lineales

- Solución de la ecuación homogénea
  - Matriz de transición
  - Propiedades de la matriz de transición
- Solución de la ecuación completa
- Cálculo de la matriz de transición
  - casos simplificables
  - método de Cayley-Hmilton
  - método de Jordan
  - mediante transformadas de Laplace
  - numericamente mediante Matlab

Solución de la ecuación completa

- ecuación completa:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad x(t_0) = x_0$$

- resolución:
  - se ensaya con una solución del tipo:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)z(t)$$

  - que introducida en la ecuación diferencial permite obtener z(t) y por tanto la solución buscada:

$$\boxed{x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau}$$

Solución de la ecuación completa

$$\boxed{x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau}$$

$\Phi(t,t_0)x_0$
- existe si y sólo si existen c.i. de las variables de estado no nulas
- es la respuesta del sistema ante entrada nula, denominada evolución libre del sistema

$\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$
- existe si y sólo si existe entada no nula
- es la respuesta del sistema desde c.i. nulas

Solución de la ecuación de estado en modelos lineales

- Solución de la ecuación homogénea
  - Matriz de transición
  - Propiedades de la matriz de transición
- Solución de la ecuación completa
- Cálculo de la matriz de transición
  - casos simplificables
  - método de Cayley-Hamilton
  - método de Jordan
  - mediante transformadas de Laplace
  - numericamente mediante Matlab

Cálculo de la matriz de transición: casos simplificables

- en los casos en que $A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau A(t)$ se verifica:

$$\boxed{\Phi(t,t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]^2 + \frac{1}{3!}\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]^3 + \ldots = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}}$$

Casos:

- A(t) es diagonal $\Phi(t,t_0) = \begin{bmatrix} e^{\int_{t_0}^{t} a_{11}(\tau)d\tau} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\int_{t_0}^{t} a_{nn}(\tau)d\tau} \end{bmatrix}$

- A(t) = a(t) M $\Phi(t,t_0) = e^{M\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$
  - caso invariante: A(t)=A $\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)} = \Phi(t-t_0)$
  - caso escalar: A(t)=a(t) $\Phi(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$

Cálculo de la matriz de transición: Método de Cayley-Hamilton

$$\boxed{\Phi(t,t_0) = e^{M\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} = \sum_{j=0}^{n-1} h_j(t) M^j}$$

calculándose los coeficientes $h_j(t)$ mediante:

$$e^{\lambda_i \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} = \sum_{j=0}^{n-1} h_j(t)\lambda_i^j \quad i = 1\cdots n$$

siendo λ_i son los valores propios de M

si algún λ_i tiene multiplicidad m_i se verificará:

$$\left.\frac{\partial^k e^{\lambda\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}}{\partial\lambda^k}\right|_{\lambda=\lambda_i} = \left.\frac{\partial^k \sum_{j=0}^{j=n-1} h_j(t)\lambda^j}{\partial\lambda^k}\right|_{\lambda=\lambda_i} \qquad k = 1\cdots m_i - 1$$

Cálculo de la matriz de transición: Método de Jordan (1/2)

si $\tilde{A}(t) = T^{-1}MT\alpha(t) = \tilde{M}\alpha(t)$ donde $\tilde{M}$ esta formada por cajas de Jordan:

$$\tilde{\Phi}(t,t_0) = e^{\tilde{M}\int_{t_0}^{t_1}\alpha(\tau)d\tau} = e^{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{M}}_i \end{bmatrix}\int_{t_0}^{t_1}\alpha(\tau)d\tau}$$

entonces:

$$\Phi(t,t_0) = T\tilde{\Phi}(t,t_0)T^{-1}$$

Cálculo de la matriz de transición: Método de Jordan (2/2)

donde para las cajas diagonales:

$$e^{\tilde{\mathbf{M}}_j \int_{t_0}^{t_1} \alpha(\tau)d\tau} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \int_{t_0}^{t_1} \alpha(\tau)d\tau} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \int_{t_0}^{t_1} \alpha(\tau)d\tau} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_k \int_{t_0}^{t_1} \alpha(\tau)d\tau} \end{bmatrix}$$

y para las cajas de Jordan:

$$e^{\tilde{\mathbf{M}}_i \int_{t_0}^{t_1} \alpha(\tau)d\tau} = e^{\lambda \int_{t_0}^{t_1} \alpha(\tau)d\tau} \begin{bmatrix} 1 & \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)d\tau & \frac{(\int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)d\tau)^2}{2!} & \cdots & \frac{(\int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)d\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)dau & \cdots & \frac{(\int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)d\tau)^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz de transición: por transformada inversa Laplace

tomando transformada de Laplace en sistemas lineales invariantes se obtiene:

$$\mathbf{x}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]\mathbf{x}_0 + \mathscr{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right]$$

por tanto:

$$\Phi(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]$$

y:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right] = \Phi(t) * \mathbf{Bu}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

Ejemplo 2.1: sistema invariante

Calcular analíticamente la evolución del siguiente sistema desde $[x_1\ x_2]^T=[1\ 1]^T$ y con entrada:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

a) Mediante Carley-Hamilton

b) Mediante Jordan

Ejemplo 2.1: resolución a)

caso invariante $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$

a) Mediante Carley-Hamilton

$$\left.\begin{aligned}\Phi(t) = e^{At} &= h_0 I + h_1 A\\ e^{\lambda t} &= h_0 + h_1\lambda\\ \frac{\partial e^{\lambda t}}{\partial \lambda} &= \frac{\partial h_0 + h_1\lambda}{\partial \lambda} \Rightarrow te^{\lambda t} = h_1\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} h_1 &= te^t\\ h_0 &= (1-t)e^t\end{aligned}$$

$$\Phi(t) = h_0\mathbf{I} + h_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix}(1+t)e^t & te^t\\ -te^t & (1-t)e^t\end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.1: resolución b)

caso invariante $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$

b) Mediante la matriz de Jordan

```
>> A=[2 1 ; -1 0];   [T,J]=jordan(A)
   T =  1    1        J =   1    1
       -1    0              0    1
```

$$e^{\mathbf{J}t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>> syms t real
>> PhiJ=exp(J(1,1)*t)*[1 t; 0 1]    PhiJ =[   exp(t), exp(t)*t]
                                          [        0,   exp(t)]
>> Phi=inv(T)*PhiJ*T     Phi=[ exp(t)*t+exp(t),        exp(t)*t]
                             [       -exp(t)*t, exp(t)-exp(t)*t]
```


Ejemplo 2.1: resolución c)

caso invariante $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$

c) Mediante el comando >> expm(Matriz)

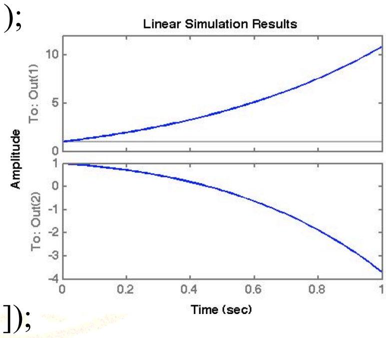
```
>> expm(A*t)

ans =  [ exp(t)*t+exp(t),        exp(t)*t]
       [       -exp(t)*t, exp(t)-exp(t)*t]
```

Ejemplo 2.1: simulación con Matlab

>[Y,X]=LSIM(A,B,C,D,U,T,X0)   comando nuevo

```
>> A=[2 1 ; -1 0];  B=[1;0];  C=[1 1];  D=[0];
>> t=0:0.01:1; u=ones(length(t),1);
>> lsim(A,B,C,D,u,t,[1;1]);
```




```
>> [Y,X]=lsim(A,B,C,D,u,t,[1;1]);
```


Ejemplo 2.2: sistema variante

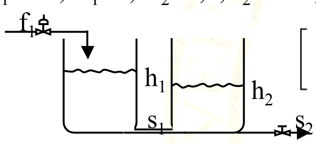
Calcular analíticamente la evolución del siguiente sistema desde $[x_1\ x_2]^T=[1\ 1]^T$ y con entrada:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2t & t\\ -t & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

a) Mediante Jordan
b) Mediante Carley-Hamilton

Ejercicio 2.1

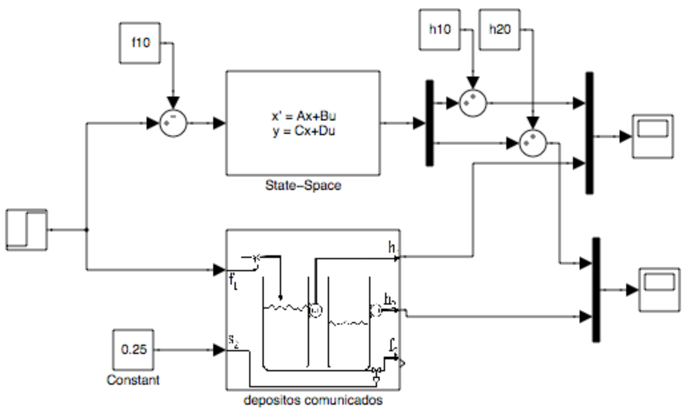
Dado el sistema del ejercicio 1.3, cuyas ecuaciones linealizadas en torno al p.e. s_1=0.3, A_1=2, A_2=1,5, s_2=0.25, F_1=1, H_1=1.38 y H_2=0,816 son:



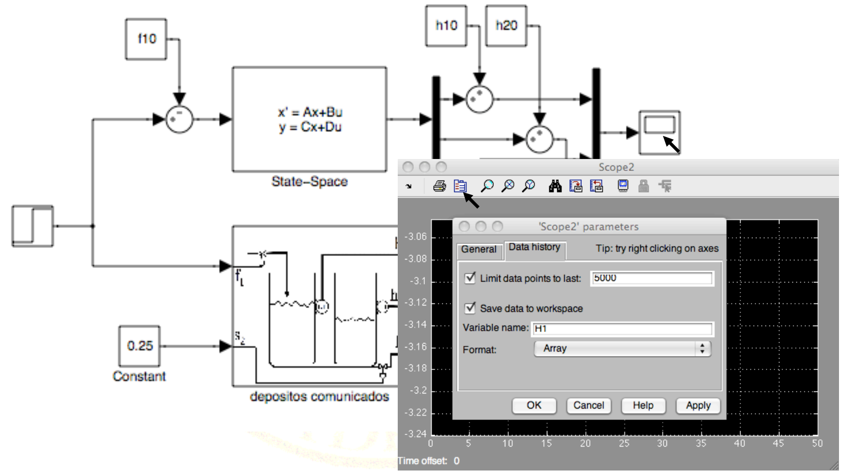
$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.441 & 0.441 \\ 0.588 & -0.996 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} f_1$$

a) Calcular la matriz de transición para t=1 (2 puntos)
b) Calcular los valores de las alturas en el modelo anterior cuando estas valen un 10% más que en el p.e. (2 puntos)
c) Obtener y dibujar los valores de ambas alturas durante 10 segundos a partir de la matriz de transición calculada, partiendo de unas alturas iniciales del apartado anterior y con entrada F1 permanentemente igual a la de su valor en el p.e. (4 puntos)
d) Superponer en la gráfica anterior la evolución de las alturas obtenidas con el comando lsim (2 puntos)

Ejemplo 2.3: resolución con Simulink



Ejemplo 2.3: resolución con Simulink



Ejercicio 2.2

Dado el sistema de depósitos del ejercicio 2.1

a) Dibujar en Simulink la evolución de las alturas del modelo lineal en las condiciones del ejercicio 2.1 (mismas c.i. y entradas) (3,3 puntos)
b) Comparar en un mismo gráfico la evolución de las alturas del modelo lineal con la evolución del modelo no-lineal (3,3 puntos)
c) Cargar en variables Matlab las evoluciones de las alturas de los apartados anteriores y compararlas en el mismo gráfico con las obtenidas en el ejercicio 2.1 (3,3 puntos)