# Controlabilidad

- Definiciones
- Controlabilidad en sistemas lineales
- Controlabilidad en sistemas lineales e invariantes.
  - Subespacio controlable
  - Subsistema controlable
- Controlabilidad de la salida



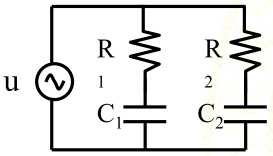
# Definiciones:

## controlabilidad de un punto del estado

- $x_1$ es controlable desde $x_0$ en $[t_o,t_1]$, si y sólo si partiendo de $x(t_0)=x_0$ existe una entrada $u(\tau)$ $t_o < \tau \leq t_1$, tal que $x(t_1)=x_1$
  - $x_1$ es controlable desde $x_0$, si y sólo para todo $t_0$ existe un $t_1$ tal que $x_1$ es controlable desde $x_0$ en $[t_o,t_1]$
  - $x_1$ es controlable en $[t_o,t_1]$, si y sólo para todo $x_0$ $x_1$ es controlable desde $x_0$ en $[t_o,t_1]$
  - $x_1$ es controlable, si y sólo para todo $x_0$ y todo $t_o$ existe un $t_1$ tal que $x_1$ es controlable desde $x_0$ en $[t_o,t_1]$

# Ejemplo 3.1: condensadores en paralelo

**Controlabilidad de puntos del espacio de estado**




$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{c1} \\ \dot{u}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} u$$

siendo: $\lambda_1 = 1/(R_1C_1)$ y $\lambda_2 = 1/(R_2C_2)$

**Para $R_1C_1 = R_2C_2$:**

a) estudiar la controlabilidad del punto $u_{c1}= u_{c2}=5$,en función del estado inicial y del intervalo de tiempo [0 t]

b) idem del punto $u_{c1}= 5$, $u_{c2}=6$

**Para $R_1C_1 = 2\ R_2C_2$:**

c) idem del punto $u_{c1}= u_{c2}=5$

d) idem del punto $u_{c1}= 5$, $u_{c2}=6$



# Definiciones: controlabilidad de sistemas

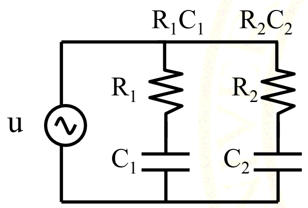
- Un sistema es controlable en $[t_o,t_1]$, si y sólo si todos los puntos del espacio de estado son controlables en $[t_o,t_1]$,
- Un sistema es controlable si y sólo si todos los puntos del espacio de estado son controlables

en sistemas lineales

$$\hat{\mathbf{x}}(t_1) = \mathbf{x}(t_1) - \Phi(t_1,t_0)\mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

# Ejemplo 3.2: condensadores en paralelo

## Controlabilidad de sistemas




ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{c1} \\ \dot{u}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} u$$

siendo: $\lambda_1 = 1/(R_1C_1)$ y $\lambda_2 = 1/(R_2C_2)$

**Para $R_1C_1 = 2\ R_2C_2$:**

- idem del punto $u_{c1}$= 5-e^(-$\lambda_1$t), $u_{c2}$=6-e^(-$\lambda_2$t) desde $[1\ 1]^T$ en el intervalo [0 1]
- estudiar la controlabilidad del sistema desde c.i. nulas en el intervalo de tiempo [0 1]



# Controlabilidad

- Definiciones
- Controlabilidad en sistemas lineales
- Controlabilidad en sistemas lineales e invariantes.
  - Subespacio controlable
  - Subsistema controlable
- Controlabilidad de la salida

# Controlabilidad de sistemas lineales: teorema

- Dado el sistema:

  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$

  es controlable en $[t_o,t_1]$ si y solo si la matriz gramiano de controlabilidad $W(t_1,t_0)$ es invertible

$$W(t_1,t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_1,\tau)d\tau$$



# Controlabilidad de sistemas lineales: demostración

$\boxed{\exists\, W^{-1}(t_1,t_0) \Leftrightarrow \text{sistema controlable en } [t_0,t_1]}$

suficiente ($\Rightarrow$) :

con la entrada $u(\tau) = B^T(\tau)\Phi^T(t_1,\tau)W^{-1}(t_1,t_0)x_1$

se obtiene $\hat{x}(t_1) = x_1$

◇por tanto cualquier estado $x_1$ es controlable

y la entrada anterior $u(\tau)$ es la de mínima energía

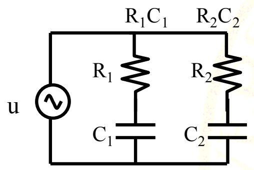
necesaria ($\Leftarrow$):

si no existe $W^{-1}(t_1,t_0)$ entonces $v^T\hat{x}(t_1) = 0$

siendo v el vector propio de W asociado al valor propio 0

◇ por tanto existen estados $\hat{x}(t_1)$ no controlables

# Ejemplo cálculo del gramiano: condensadores paralelo




ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{c1} \\ \dot{u}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} u$$

siendo: $\lambda_1 = 1/(R_1C_1)$ y $\lambda_2 = 1/(R_2C_2)$

Gramiano de controlabilidad:

$$\begin{aligned} W(t,0) &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_1(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} [\lambda_1 \quad \lambda_2] \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_1(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} 0.5\lambda_1(1-e^{-2\lambda_1 t}) & \frac{\lambda_1\lambda_2(1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t})}{\lambda_1+\lambda_2} \\ \frac{\lambda_1\lambda_2(1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t})}{\lambda_1+\lambda_2} & 0.5\lambda_2(1-e^{-2\lambda_2 t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$



# Ej. Condensadores paralelo: $R_1C_1 = R_2C_2$

Gramiano de controlabilidad:

$$W(t,\ 0) = \begin{bmatrix} 0.5\lambda_1(1-e^{-2\lambda_1 t}) & 0.5\lambda_1(1-e^{-2\lambda_1 t}) \\ 0.5\lambda_1(1-e^{-2\lambda_1 t}) & 0.5\lambda_1(1-e^{-2\lambda_1 t}) \end{bmatrix}$$

$$|W(t,0)| = 0 \Longrightarrow \text{sistema no controlable}$$

# Ej. Condensadores paralelo:

$$R_1C_1 = 1,\ R_2C_2 = 2 \quad \text{y} \quad t = 1$$

Gramiano de controlabilidad:

$$W(1,0) = \begin{bmatrix} 0.5(1-e^{-2}) & \frac{0.5}{1.5}(1-e^{-1.5}) \\ \frac{0.5}{1.5}(1-e^{-1.5}) & 0.25(1-e^{-1}) \end{bmatrix}$$

$$|W(1,0)| = 0.0013 \neq 0$$

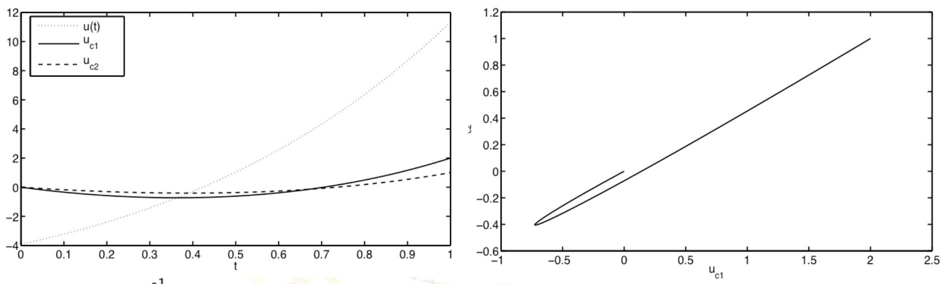
Cálculo entrada de mínima energía para: $[u_{c1}(1)\ u_{c2}(1)]^T = [2\ 1]^T$

$$\begin{aligned} u(\tau) &= B^T\Phi^T(1,\tau)W^{-1}(1,0)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= [1 \quad 0.5]\begin{bmatrix} e^{-1+\tau} & 0 \\ 0 & e^{-0.5+0.5\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4323 & 0.2590 \\ 0.2590 & 0.1580 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= 45.2\ e^{\tau-1} - 33.88\ e^{0.5\tau-0.5} \end{aligned}$$



# Ej. Condensadores paralelo:

$$R_1C_1 = 1,\ R_2C_2 = 2 \quad \text{y} \quad t = 1$$




$$E(u(\tau)) = \int_0^1 u^2(\tau)d\tau = 23.16 \text{ J}$$

# Ej. Condensadores paralelo:

$$\boxed{R_1C_1 = 1,\ R_2C_2 = 2 \quad \text{y} \quad t = 0.1}$$

Gramiano de controlabilidad:

$$W(0.1,0) = \begin{bmatrix} 0.5(1-e^{-0.2}) & \frac{0.5}{1.5}(1-e^{-0.15}) \\ \frac{0.5}{1.5}(1-e^{-0.15}) & 0.25(1-e^{-0.1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0906 & 0.0464 \\ 0.0464 & 0.0238 \end{bmatrix}$$

$$|W(0.1,0)| = 4.48\ 10^{-7}$$

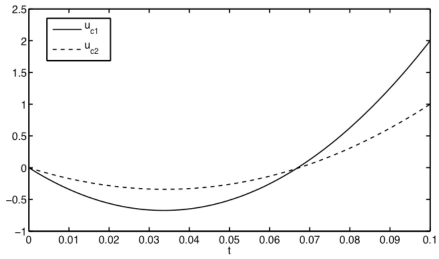
Cálculo entrada de mínima energía para: $[u_{c1}(1)\ u_{c2}(1)]^T = [2\ 1]^T$

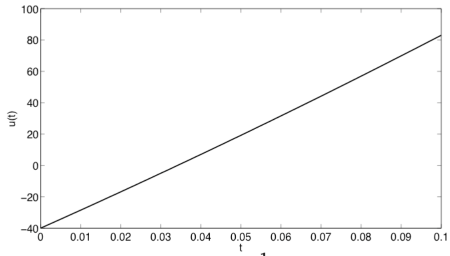
$$\begin{aligned} u(\tau) &= B^T\Phi^T(0.1,\tau)W^{-1}(0.1,0)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= [1 \quad 0.5]\begin{bmatrix} e^{-0.1+\tau} & 0 \\ 0 & e^{-0.05+0.5\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.0906 & 0.0464 \\ 0.0464 & 0.0238 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= 2564\ e^{\tau-0.1} - 2481\ e^{0.5\tau-0.05} \end{aligned}$$



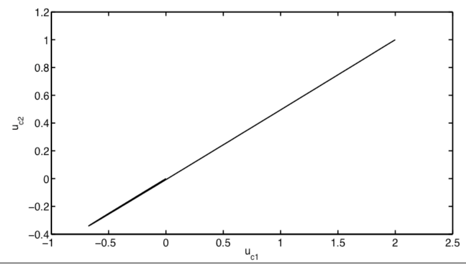
# Ej. Condensadores paralelo:

$$\boxed{R_1C_1 = 1,\ R_2C_2 = 2 \quad \text{y} \quad t = 0.1}$$




$$E(u(\tau)) = \int_0^1 u^2(\tau)d\tau = 168.68\,\mathrm{J}$$



# Ej. Condensadores paralelo:

$$\boxed{R_1C_1 = 1 \text{ y } R_2C_2 = 1.1 \quad \text{y} \quad t = 1}$$

Gramiano de controlabilidad:

$$W(1,0) = \begin{bmatrix} 0.5(1-e^{-2t}) & 0.4762(1-e^{-1.9091t}) \\ 0.4762(1-e^{-1.9091t}) & 0.4545(1-e^{-1.818t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4323 & 0.4056 \\ 0.4056 & 0.3808 \end{bmatrix}$$

$$|W(1,0)| = 9,53\ 10^{-5}$$

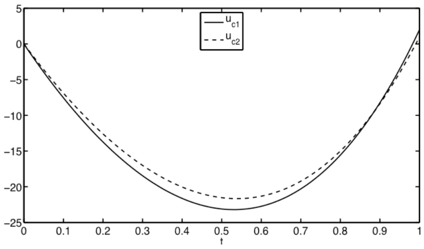
Cálculo entrada de mínima energía para: $[u_{c1}(1)\ u_{c2}(1)]^T = [2\ 1]^T$

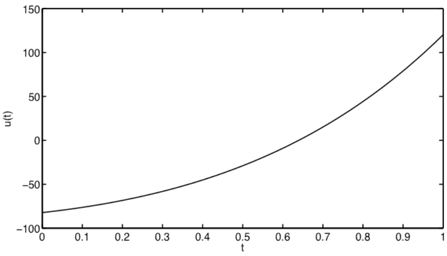
$$\begin{aligned} u(\tau) &= B^T\Phi^T(1,\tau)W^{-1}(1,0)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= [1 \quad 0.9091]\begin{bmatrix} e^{-1+\tau} & 0 \\ 0 & e^{-0.9091(1-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4323 & 0.4056 \\ 0.4056 & 0.3808 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= 3733\ e^{\tau-1} - 3613\ e^{0.9091(\tau-1)} \end{aligned}$$

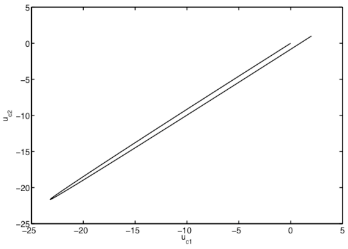


# Ej. Condensadores paralelo:

$$\boxed{R_1C_1 = 1 \text{ y } R_2C_2 = 1.1 \quad \text{y} \quad t = 1}$$




$$E(u(\tau)) = \int_0^1 u^2(\tau)d\tau = 953290\,\mathrm{J}$$

## comandos Matlab

```
>> Wc=gram(sys,'c')
>> det(Wc)
```

Gramiano en el intervalo (t, t0)

```
>> syms tau real
>> Wc=eval(int(expm(A*(t-tau)*B* …
          B'*expm(A*(t-tau)',tau,t0,t))
```



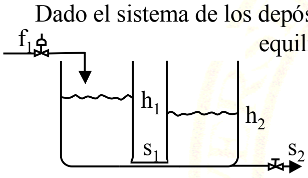
## comandos Matlab

Alternativa no simbólica para el cálculo del Gramiano en el intervalo (t, t0)

```
>W11=quad(@Wint11,0,t)
        function y=Wint11(x)
        global A B t;
        for i=1:length(x)
            Int(:,:,i)=expm(A*(t-x(i)))*B*B'*expm(A*(t-x(i)))';
        end
        y=Int(1,1,:);
>Wc=[quad(@Wint11,0,t) quad(@Wint12,0,t);
         quad(@Wint21,0,t) quad(@Wint22,0,t)]
```

# Ejercicio 3.1
# gramiano de controlabilidad

Dado el sistema de los depósitos, con $A_1$=2, $A_2$=1,5, $s_2$=0.25 y $F_1$=1, cuyos valores de equilibrio para distintos $s_{10}$ se calculan:




$$
\begin{aligned}
0 &= f_{1_0} - s_{1_0}\sqrt{2g(h_{1_0}-h_{2_0})} & \qquad f_{10} &= f_{1-20} \\
0 &= s_{1_0}\sqrt{2g(h_{1_0}-h_{2_0})} - s_{2_0}\sqrt{2gh_{2_0}} & \qquad f_{1-20} &= f_{20}
\end{aligned}
$$

y cuyas ecuaciones linealizadas son:

$$
\begin{aligned}
A_1\dot{h}_1 &= -\left.\frac{s_1^2\sqrt{g}}{f_1}\right|_0 h_1 + \left.\frac{s_1^2\sqrt{g}}{f_1}\right|_0 h_2 + f_1 \\
A_2\dot{h}_2 &= \left.\frac{s_1^2\sqrt{g}}{f_1}\right|_0 h_1 - \left.\frac{(s_1^2+s_2^2)\sqrt{g}}{f_1}\right|_0 h_2
\end{aligned}
$$

a) calcular el valor del gramiano en el intervalo de tiempo [0 10] para $s_{10}$=0.3 y para $s_{10}$=2, analizando los resultados obtenidos.(5 puntos)
b) calcular el valor del gramiano para $s_{10}$=0.3 y en los intervalos de tiempo [10 20] y [10 11], analizando los resultados obtenidos. (5 puntos)



# Controlabilidad

- Definiciones
- Controlabilidad en sistemas lineales
- Controlabilidad en sistemas lineales e invariantes.
  - Subespacio controlable
  - Subsistema controlable
- Controlabilidad de la salida

# Controlabilidad de sistemas lineales e invariantes: teorema

- Dado el sistema:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

es controlable si y solo si la matriz Q es de rango máximo (n).

$$Q = \left[ B \mid AB \mid A^2B \mid \ldots \mid A^{n-1}B \right]$$



# Controlabilidad de sistemas lineales e invariantes: demostración

$\boxed{\text{rango (Q) = n} \Leftrightarrow \text{sistema es controlable}}$

necesario ($\Leftarrow$):

$\hat{x}(t_1)$es c.l. de los vectores columna de Q

◇por tanto para que cualquier $\hat{x}(t_1)$ sea controlable el rango(Q) tiene que ser n

suficiente ($\Rightarrow$):

si no es controlable existen vectores ⊥ a Q

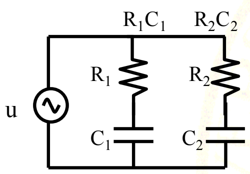
◇ por tanto si no es controlable el rango (Q) < n

# comandos Matlab

```
>Q=ctrb(sys)
>rank (Q)
```



# Ejercicio 3.2 controlabilidad: condensadores paralelo




ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{c1} \\ \dot{u}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} u$$

siendo: $\lambda_1 = 1/(R_1C_1)$ y $\lambda_2 = 1/(R_2C_2)$

- calcular la controlabilidad de este sistema mediante la matriz Q
- calcular el subespacio controlable
- calcular los puntos controlables desde $x_0 = [2 \quad 1]^T$ en el intervalo $t \in [0 \quad 1]$

# Controlabilidad

- Definiciones
- Controlabilidad en sistemas lineales
- Controlabilidad en sistemas lineales e invariantes.
  - Subespacio controlable
  - Subsistema controlable
- Controlabilidad de la salida



# Sistemas lineales invariantes: Suespacio controlable

- Todos los puntos controlables desde c.i. nulas en un sistema lineal e invariante forman un subespacio, denominado subespacio controlable
- El subespacio controlable esta generado por las columnas de Q de dimensión $r_Q$=rango(Q)

$$Q = \left[ B \mid AB \mid A^2B \mid \ldots \mid A^{n-1}B \right]$$

# Subsistema controlable: lema

Dado un sistema lineal e invariante con dimensión del subespacio controlable $r_Q<n$, existe una matriz de cambio de base T tal que:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa} & \tilde{A}_{ab} \\ 0 & \tilde{A}_{bb} \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

en el que el subsistema $\left(\tilde{A}_{aa}\tilde{B}_a\right)$ de dimensión $r_Q x r_Q$ es controlable

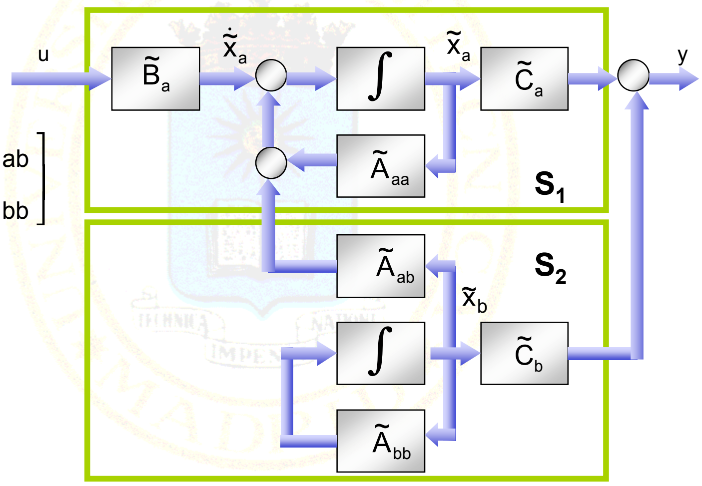
donde $T=[T_a T_b]$, donde $T_a$ es una base del subespacio controlable del sistema



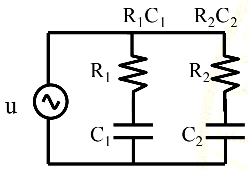
# Subsistema controlable: representación gráfica

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa} & \tilde{A}_{ab} \\ 0 & \tilde{A}_{bb} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_a \\ 0 \end{bmatrix}$$



# Ejercicio 3.3 subsist. controlable: condensadores paralelo




ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{c1} \\ \dot{u}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} u$$

siendo: $\lambda_1 = 1/(R_1 C_1)$ y $\lambda_2 = 1/(R_2 C_2)$

- calcular un subsistema controlable
- ¿es la variable $x_1$ un subsistema controlable?
- ¿es la variable $x_2$ un subsistema controlable?
- ¿qué variables constituyen un sistema con dinámica independiente de la entrada?