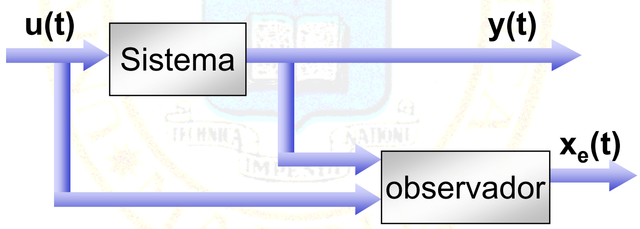
Observadores del estado

- Introducción
- Definición
- Dinámica del sistema con observador
- Cálculo de observadores en sistemas monovariables
- Cálculo de observadores en sistemas multivariables

Introducción

- Concepto: el observador estima el estado del sistema a partir de la dinamica de su entrada y su salida.



Definición

dado un sistema lineal, invariante y observable:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

el siguiente sistema es un observador del sistema anterior:

$$\dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}_e(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{y}(t)$$

si cumple las dos condiciones:

1. $\forall x_e(t_o), x(t_o), u(\tau) \;\; para\ \tau > t_o \Rightarrow \lim_{t\to\infty}(x_e(t) - x(t)) = 0$
2. $Si\ x_e(t_o) = x(t_o) \Rightarrow \forall u(\tau) \;\; \tau > t_o\ se\ verifica\ (x_e(t) - x(t)) = 0$

Matrices del observador

la dinámica de x_e(t)-x(t) es:

$$\dot{\mathbf{x}}_e(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}_e(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{G} - \mathbf{B})\mathbf{u}(t)$$

la segunda condición implica:

$$G = B$$

la primera condición implica que:

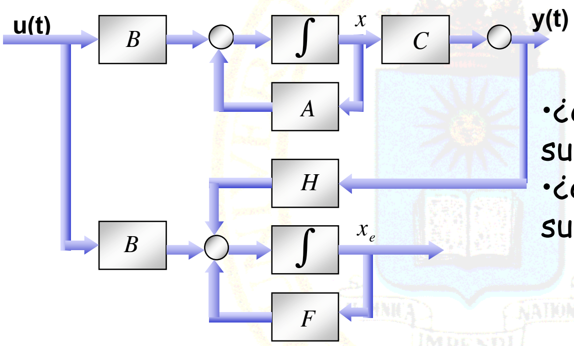
$F = A - HC$ debe tener todos los polos estables

cuanto más rápidos sean los polos de F,
antes tenderá x_e(t) a x(t)

Observadores del estado

- Introducción
- Definición
- Dinámica del sistema con observador
  - en cadena abierta
  - con realimentación del estado
- Cálculo de observadores en sistemas monovariables
- Cálculo de observadores en sistemas multivariables

Dinámica del sistema con observador en cadena abierta (1/2)



•¿cuál es la dimensión del subespacio controlable?
•¿qué variables forman el subsistema no controlable?

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{HC} & \mathbf{A}-\mathbf{HC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

Dinámica del sistema con observador en cadena abierta (2/2)

la matriz de controlabilidad:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$ es de rango n

la matriz de cambio de base para separar los subsistemas es:

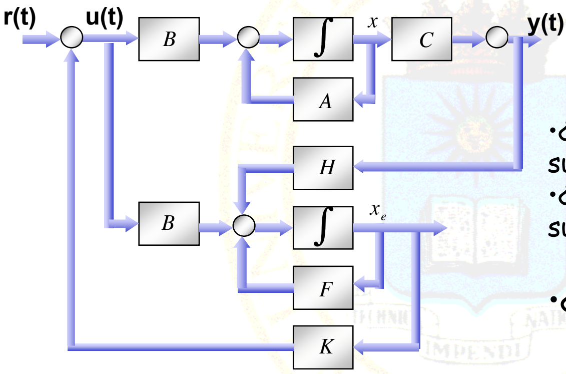
$$\mathbf{T_c} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T_c}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t) - \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}$$

la dinámica en la nueva base es:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_e(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{HC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t) - \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

Dinámica del sistema con observador y realimentación (1/2)



- ¿cuál es la dimensión del subespacio controlable?
- ¿qué variables forman el subsistema no controlable?

- ¿cuál es la dinámica de x?

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{HC} & \mathbf{A} - \mathbf{HC} + \mathbf{BK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{r}(t)$$

Dinámica del sistema con observador y realimentación (2/2)

la matriz de controlabilidad:

$$\mathbf{Q}=\left[\begin{array}{ccccc}\mathbf{B} & (\mathbf{A}+\mathbf{BK})B & (\mathbf{A}+\mathbf{BK})^2B & \cdots & (\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{n-1}B \\ \mathbf{B} & (\mathbf{A}+\mathbf{BK})B & (\mathbf{A}+\mathbf{BK})^2B & \cdots & (\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{n-1}B\end{array}\right]$$ es de rango n

la matriz de cambio de base :

$$\mathbf{T_c}=\left[\begin{array}{cc}\mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & \mathbf{I}\end{array}\right] \quad \tilde{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{T_c}^{-1}\left[\begin{array}{c}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}\mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t)-\mathbf{x}(t)\end{array}\right]$$

la dinámica en la nueva base:

$$\left[\begin{array}{c}\dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_e(t)-\dot{\mathbf{x}}(t)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}\mathbf{A}+\mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}-\mathbf{HC}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}_e(t)-\mathbf{x}(t)\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}\mathbf{B} \\ \mathbf{0}\end{array}\right]\mathbf{r}(t)$$

Principio de separabilidad: el observador y la realimentación del estado se pueden calcular de forma independiente

Observadores del estado

- Introducción
- Definición
- Dinámica del sistema con observador
- Cálculo de observadores en sistemas monovariables
- Cálculo de observadores en sistemas multivariables

Cálculo de observadores en sistemas monovariables (1/2)

dado un sistema monovariable:

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

existe una matriz de cambio de base T_o tal que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u$$

Cálculo de observadores en sistemas monovariables (2/2)

la dinámica del observador vale:

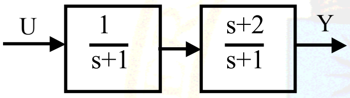
$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{HC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -(a_0 + h_1) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -(a_1 + h_2) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -(a_2 + h_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -(a_{n-1} + h_n) \end{bmatrix}$$

igualándolo con la dinámica de F, representada por su polinomio característico: $P_f(s) = s^n + f_{n-1}s^{n-1} + f_{n-2}s^{n-2} + \ldots + f_1 s + f_0$

se calculan los coeficientes de H como:

$$\begin{aligned} h_1 &= -a_0 + f_0 \\ h_2 &= -a_1 + f_1 \\ &\vdots \\ h_n &= -a_{n-1} + f_{n-1} \end{aligned}$$

Problema de observador en sistemas monovariables



- Dibujar la estructura de un observador del estado
- Calcular todas las matrices de dicha estructura de manera que la dinámica del observador sea 3 veces más rápida que la del sistema

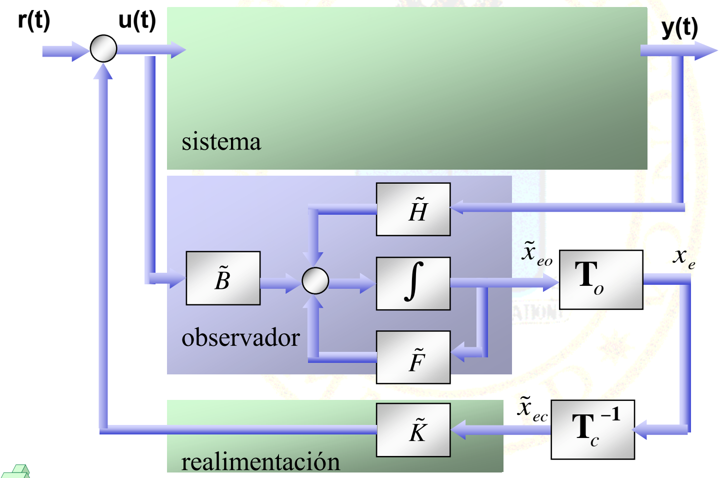
Observadores en sistemas monovariables: cálculo de T_o

- Cálculo de la matriz de cambio de base T_o tal que: $x = T_o \tilde{x}_o$
  donde **x** son las variables originales y $\tilde{\mathbf{x}}_o$ son las variables de fase

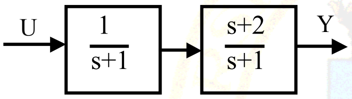
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} c \\ c\mathbf{A} \\ c\mathbf{A}^2 \\ \cdots \\ c\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n & \mathbf{A}\mathbf{e}_n & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{e}_n \end{bmatrix}$$

Observadores y realimentación: variables de estado involucradas



Problema en sistema monovariable: observador y realimentación



•Dibujar la estructura de un observador y de realimenatción del estado, usando el observador calculado anteriormente y la realimentación calculada en el capitulo 5 que coloca ambos polos en -2:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix} \quad T_c^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

•Comprobar el comportamiento del sistema en Simulink