7. Aplicaciones proyectivas

Una **aplicación proyectiva** del plano es una aplicación $f:\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^2$, es decir, que lleva rectas vectoriales de $\mathbb{R}^3$ a rectas vectoriales de $\mathbb{R}^3$, y que define a su vez una aplicación lineal $\mathbf{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, de modo que, si $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{y}$, entonces $f(x)=y$, siendo $\mathbf{x},\mathbf{y}$ representantes de los puntos x,y del plano proyectivo.

En una base vectorial de $\mathbb{R}^3$, $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$, la aplicación $\mathbf{f}$ tendrá una expresión coordenada

$$\begin{pmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix},$$

donde (x_0,x_1,x_2), (y_0,y_1,y_2) son las coordenadas de $\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})$, respectivamente, en dicha base y M es la matriz de $\mathbf{f}$.

En el plano proyectivo, en una referencia $\{a,b,c;d\}$ para la cual $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ son vectores representantes que verifican (14), la expresión matricial será la misma,

$$\begin{pmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\lambda M\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix},$$

salvo un factor multiplicativo $\lambda\neq 0$.

Veámoslo en un ejemplo sencillo sobre la recta proyectiva, $\mathbb{P}^1$. En este caso, las ecuaciones de una aplicación proyectiva serán de la forma

$$\begin{pmatrix} y_0\\ y_1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} Ax_0+Bx_1\\ Cx_0+Dx_1\end{pmatrix}.$$

Para ganar intuición, proyectamos sobre la recta afín, dividiendo por la primera componente, es decir, eligiendo representantes en los que $y_0=1=x_0$,

$$y_1=\frac{C+Dx_1}{A+Bx_1}. \tag{15}$$

Son las llamadas **transformaciones de Möbius** de la recta. En general, son funciones racionales, salvo si $B=0$, caso en el que recuperamos las aplicaciones afines de la recta. En caso contrario, la imagen de $x_1=-A/B$

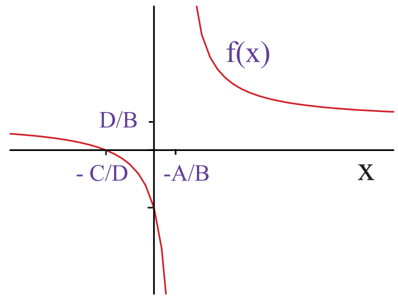

Figura 11: Transformación de Möbius

queda fuera de la recta afín, ya que es el punto del infinito. Son aplicaciones proyectivas que no tienen equivalente afín, ya que mezclan el punto del infinito con los puntos afines.

Si (C, D) fuese proporcional a (A, B), podríamos factorizar la aplicación y nos quedaría $y_1 = \text{const}$. Este es un caso degenerado que evitamos exigiendo a las aplicaciones de Möbius que $AD - BC \neq 0$, es decir, que la aplicación lineal sea regular.

Claramente, las aplicaciones proyectivas no respetan la razón simple. Sin embargo, dado que la expresión anterior no depende de x, vemos que el cociente de dos razones simples *sí* es conservado,

$$\frac{[f(a), f(b), f(x)]}{[f(a), f(b), f(c)]} = \frac{[a, b, x]}{[a, b, c]} \ . \tag{16}$$

De hecho, se puede demostrar que las aplicaciones proyectivas son las únicas que conservan este cociente, que, por ser razón de dos razones simples, denominaremos **razón doble** de los puntos a, b, c, x,

$$[a, b, c, x] := \frac{[a, b, x]}{[a, b, c]} = \frac{\mathbf{ax}}{\mathbf{xb}}\frac{\mathbf{cb}}{\mathbf{ac}} \ . \tag{17}$$

Si llevamos el punto b al infinito, el cociente $\mathbf{cb}/\mathbf{xb}$ tiende a la unidad y la razón doble está bien definida. Más aún, si tomamos $a = 0$, $c = 1$ (como corresponde a que, si $(1, 0)$, $(0, 1)$ son las coordenadas de a, b, respectivamente, entonces $(1, 1)$ son las del punto unidad c), entonces nos queda $[0, \infty, 1, x] = x$, es decir, la razón doble $[a, b, c, x]$ nos proporciona la coordenada inhomogénea de x en la referencia $\{a, b; c\}$. Ejemplo.

Lo mismo que para la razón simple, existen definiciones alternativas de la razón doble, que tan sólo modifican el orden de los puntos.

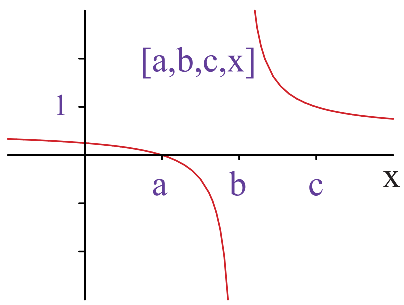

Figura 12: Razón doble de cuatro puntos alineados