4. Coordenadas baricéntricas

Con frecuencia haremos uso de otro tipo de coordenadas en el plano. La relación con las coordenadas cartesianas, más usuales, es sencilla. Sólo se trata de poner en pie de igualdad los tres elementos de la referencia y, en vez de requerir un punto y dos vectores, $\{a, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$, necesitaremos tres puntos. La manera de obtenerlos es sencilla. Simplemente trasladamos el origen por cada de uno de los vectores de la base y así obtenemos la **referencia baricéntrica** $\{a, b, c\}$, $b = a + \mathbf{e_1}$, $c = a + \mathbf{e_2}$.

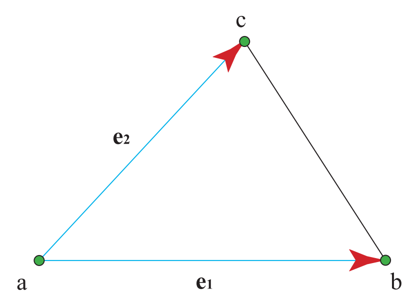

Figura 4: Cambio de referencia cartesiana a baricéntrica

Si el punto x tenía por coordenadas $(1, x_1, x_2)$ en la referencia cartesiana, sus coordenadas baricéntricas son sencillas de obtener:

$$x = 1 \cdot a + x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} = (1 - x_1 - x_2)a + x_1(a + \mathbf{e_1}) + x_2(a + \mathbf{e_2}) \ , \qquad (7)$$

de donde se deduce que un punto de coordenadas cartesianas $(1, x_1, x_2)$ tiene coordenadas baricéntricas $(1 - x_1 - x_2, x_1, x_2)$, que obviamente suman uno, ya que una combinación de puntos debe tener suma de coeficientes igual a la unidad.

Del mismo modo, un vector de coordenadas cartesianas $(0, x_1, x_2)$ tiene coordenadas baricéntricas $(-x_1 - x_2, x_1, x_2)$, que suman cero, como corresponde a un vector.

A la inversa, para pasar de coordenadas baricéntricas a coordenadas cartesianas con origen en, por ejemplo, el primero de los puntos, sólo es preciso eliminar la primera coordenada baricéntrica y sustituirla por un uno o un cero, dependiendo de si es un vector o un punto. Es decir, un punto de coordenadas baricéntricas (x_0, x_1, x_2), $\sum_{i=0}^{2} x_i = 1$, tiene coordenadas cartesianas

$(1, x_1, x_2)$ si el origen es a. Si fuera un vector, sus coordenadas cartesianas serían $(0, x_1, x_2)$.

Aunque no formen una referencia, podemos realizar **combinaciones baricéntricas** de varios puntos $\{a_1, \ldots, a_n\}$ y escribir un punto x como $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$, donde x_i son los coeficientes de la combinación, que deberán sumar la unidad. Para un vector, deberán sumar cero.

La interpretación de las coordenadas baricéntricas es sencilla. Consideremos tan sólo dos puntos $\{a, b\}$. Un punto x que sea combinación baricéntrica de $\{a, b\}$ se escribe como $x = (1-t)a + tb$, es decir, $\mathbf{ax} = t\mathbf{ab}$, con lo cual las combinaciones baricéntricas de $\{a, b\}$ describen la recta que pasa por a y b. Más aún, podemos saber que, si las dos coordenadas $(1-t)$, t están entre cero y uno, el punto x pertenece al segmento $\overline{ab}$. El punto a corresponde a $t = 0$ y el punto b, a $t = 1$. Los puntos con $t > 1$ están más allá de b y los que tienen $t < 0$ están más allá de a. Ejemplo.

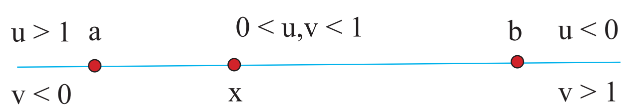

Figura 5: Coordenadas baricéntricas en la recta

Esto nos lleva a una construcción típica de la geometría afín, la **razón simple** de tres puntos alineados, a, b, x, que denotaremos por

$$[a, b, x] := \frac{\mathbf{ax}}{\mathbf{xb}} = \frac{t}{1-t} \,, \tag{8}$$

que no es más que la proporción existente entre los dos segmentos en los que "divide" el punto x al segmento $\overline{ab}$. Ejemplo.

Claramente, si x está realmente contenido en el segmento $\overline{ab}$, la razón simple es positiva y toma valores en el intervalo $(0, \infty)$. Si x está situado más allá de b, la razón simple toma un valor en el intervalo $(-\infty, -1)$. Y si x se encuentra más allá de a, toma un valor en $(-1, 0)$. Los puntos singulares corresponden a los casos degenerados de dos puntos coincidentes,

$$[a, b, a] = 0 \,, \qquad [a, b, b] = \infty \,, \qquad [a, a, x] = -1 \,. \tag{9}$$

La importancia de la razón simple radica en que es invariante bajo aplicaciones afines, propiedad esta muy importante que subyace en el diseño.

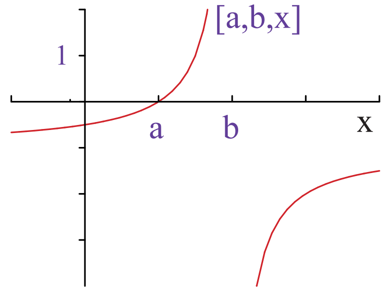

Figura 6: Razón simple de tres puntos alineados

La demostración es bien simple. Como a, b, x están alineados, denotando $r := [a, b, x]$,

$$\mathbf{ax} = r\mathbf{xb} \ , \quad \mathbf{f}(\mathbf{ax}) = r\mathbf{f}(\mathbf{xb}) \Rightarrow [a, b, x] = r = [f(a), f(b), f(x)] \ , \qquad (10)$$

la proporción se mantiene por la linealidad de $\mathbf{f}$. □

De hecho, las aplicaciones afines pueden caracterizarse precisamente por ser las únicas que conservan la razón simple de tres puntos alineados.

En el plano, podemos hacer una clasificación similar de los puntos en términos de sus coordenadas baricéntricas en una referencia $\{a, b, c\}$. Si $x = ua + vb + wc$, de modo que $u + v + w = 1$, el punto x estará en el interior del triángulo descrito por la referencia si $0 < u, v, w < 1$. Si $u = 0$, el punto está sobre la recta bc y así sucesivamente. Ejemplo.

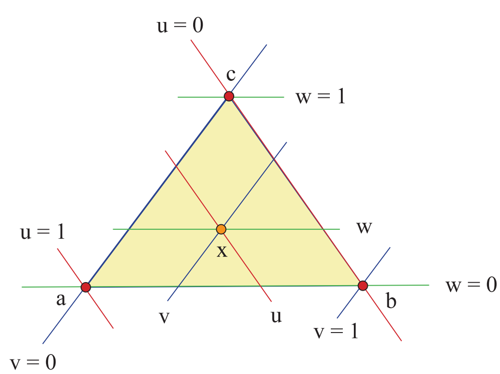

Figura 7: Coordenadas baricéntricas en el plano

Esta propiedad se generaliza sin dificultad a combinaciones baricéntricas de varios puntos $\{a_0, \ldots, a_n\}$: Un punto $x = \sum_{i=0}^{n} u_i a_i$, tal que $\sum_{i=0}^{n} u_i = 1$ de modo que $0 < u_0, \ldots, u_n < 1$ está situado en el interior de la envolvente convexa de $\{a_0, \ldots, a_n\}$, es decir, el menor polígono convexo (con ángulos interiores menores que π) que encierra a todos los puntos.

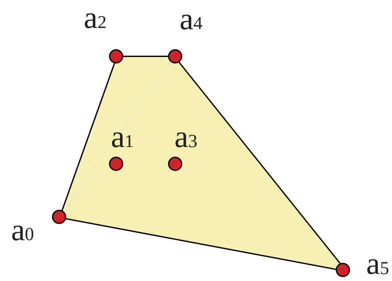

Figura 8: Envolvente convexa de seis puntos

El nombre de baricéntrico hace referencia a que estas combinaciones generalizan el concepto de **baricentro o centro de gravedad** de un conjunto de puntos, g,

$$g = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} a_i \ ,$$

que no es más que el caso particular en el que todos los coeficientes son iguales.

Las aplicaciones afines también se pueden expresan en coordenadas baricéntricas. Si $x = x_0 a + x_1 b + x_2 c = a + x_1 \mathbf{ab} + x_2 \mathbf{ac}$, entonces

$$f(x) = f(a) + x_1 \mathbf{f}(\mathbf{ab}) + x_2 \mathbf{f}(\mathbf{ac}) = x_0 f(a) + x_1 f(b) + x_2 f(c) \ , \tag{11}$$

teniendo en cuenta que $\sum x_i = 1$.

Así pues, las aplicaciones afines respetan las combinaciones baricéntricas,

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} u_i a_i\right) = \sum_{i=0}^{n} u_i f\left(a_i\right) \ , \tag{12}$$

hecho que nos será muy útil al definir las parametrizaciones de Bézier.

Por ello, podemos expresar una aplicación afín en una referencia $\{a, b, c\}$ como

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} , \tag{13}$$

donde (y_0, y_1, y_2) son las coordenadas baricéntricas de la imagen, $f(x)$, de un punto x, de coordenadas (x_0, x_1, x_2). Las columnas de la matriz M de la aplicación son las coordenadas de las imágenes de los puntos de la referencia $\{a, b, c\}$.