3. Coordenadas cartesianas

Para trabajar en el plano afín es conveniente introducir sistemas de referencia que nos permitan describir los puntos mediante parejas de números, que llamaremos **coordenadas cartesianas** del punto. Ejemplo.

Para introducir un sistema de referencia cartesiano en el plano, es preciso indicar un punto, el **origen** de coordenadas, y dos vectores que formen una base del plano vectorial. En una **referencia** $\{a, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ podremos expresar cualquier punto x del plano mediante las coordenadas (x_1, x_2) del vector que lo une al origen, $\mathbf{ax}$,

$$\mathbf{ax} = x_1\,\mathbf{e_1} + x_2\,\mathbf{e_2}\,, \qquad x = a + \mathbf{ax} = a + x_1\,\mathbf{e_1} + x_2\,\mathbf{e_2}\,. \tag{5}$$

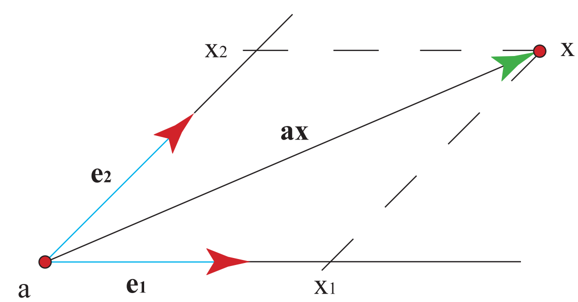

Figura 3: Coordenadas cartesianas en el plano en la referencia $\{0, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$

Como manera de distinguir puntos de vectores, es conveniente expresar las coordenadas del punto x como $(1, x_1, x_2)$, para diferenciarlas de las del vector $\mathbf{ax}$, que denotaremos con frecuencia como $(0, x_1, x_2)$.

Si $\mathbf{f}$ es la aplicación lineal asociada a una aplicación afín f y M es la matriz de $\mathbf{f}$ en una base $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$, entonces, como $f(x) = f(a) + \mathbf{f}(\mathbf{ax})$, podemos expresar las coordenadas cartesianas, (y_1, y_2), de $f(x)$ como

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,,$$

si (b_1, b_2) son las coordenadas cartesianas de $f(a)$. La notación

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & \multirow{2}{*}{M} \\ b_2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

es mucho más compacta. Las columnas de la matriz de la aplicación afín son las coordenadas de las imágenes de los elementos de la referencia, $f(a)$, $\mathbf{f}(\mathbf{e_1})$, $\mathbf{f}(\mathbf{e_2})$.

Por tanto, dada la imagen de una referencia, tenemos fijada la aplicación afín de manera única.