

2. El plano afín

El plano afín es una pareja formada por un conjunto, \mathbb{A}^2 , formado por unos elementos llamados **puntos** y el espacio lineal \mathbb{R}^2 , es decir, el plano vectorial, cuyos elementos son los **vectores**. Vectores y puntos están ligados por una aplicación φ , que asocia a cada par de puntos $x, y \in \mathbb{A}^2$ el vector que los une, es decir, el vector con origen y final, respectivamente, en x e y ,

$$\varphi(x, y) = \mathbf{xy} . \quad (1)$$

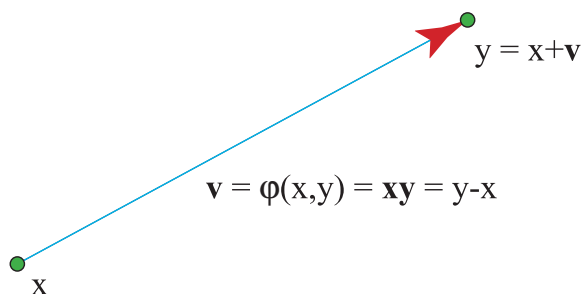


Figura 1: Los puntos del plano afín están relacionados con los vectores del plano

O, indicado de una manera más laxa, podemos denotar esta operación como $\mathbf{xy} = y - x$, $y = x + \mathbf{xy}$, expresando de manera compacta el hecho de que el punto y se obtiene trasladando (sumando) el punto x por el vector \mathbf{xy} .

El plano afín se puede transformar por medio de **aplicaciones afines**, muchas veces llamadas lineales de manera abusiva, ya que en el fondo son aplicaciones lineales con un término homogéneo adicional. Se caracterizan porque respetan la estructura vectorial del plano. Es decir, si usamos la relación entre puntos y vectores para definir a partir de la aplicación f en el plano afín una aplicación, \mathbf{f} , en el plano vectorial:

$$\mathbf{f}(\mathbf{xy}) := f(y) - f(x) , \quad (2)$$

dicha aplicación \mathbf{f} deberá ser lineal:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}) + \mathbf{f}(\mathbf{w}) , \quad \mathbf{f}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{f}(\mathbf{v}) , \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 , \lambda \in \mathbb{R} . \quad (3)$$

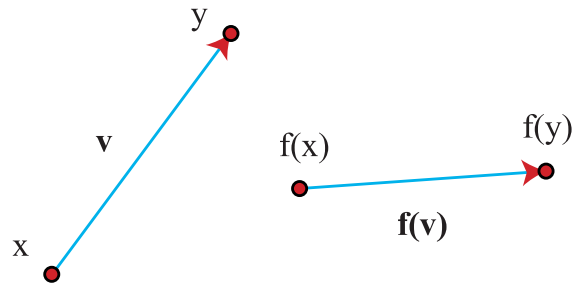


Figura 2: Una aplicación afín define una aplicación lineal

Por tanto, para dar una aplicación afín, sólo es preciso dar una aplicación lineal y la imagen de un punto, ya que, si $x = a + \mathbf{v}$,

$$f(x) - f(a) = \mathbf{f}(\mathbf{ax}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}), \quad f(x) = f(a) + \mathbf{f}(\mathbf{v}). \quad (4)$$

Estos conceptos se pueden generalizar sin dificultad al espacio afín.