5. Plano proyectivo

La asimetría entre puntos y vectores del plano afín se soslaya en una construcción más compleja, el plano proyectivo. Veremos que en él puntos y vectores están en pie de igualdad y que sólo al descender al plano afín aparecen las diferencias. Los vectores serán los puntos del infinito.

Para ello, consideremos en $\mathbb{R}^3$ el conjunto de rectas que pasan por el origen. A cada recta le asignamos un punto del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$. Para identificar los puntos de $\mathbb{P}^2$, tomamos un punto representante de cada recta cortándolas, por ejemplo, por el plano $x_0 = 1$. Cada recta corta a dicho plano en un único punto, salvo las rectas horizontales, paralelas al plano, que cortarían a $x_0 = 1$ en un punto del infinito.

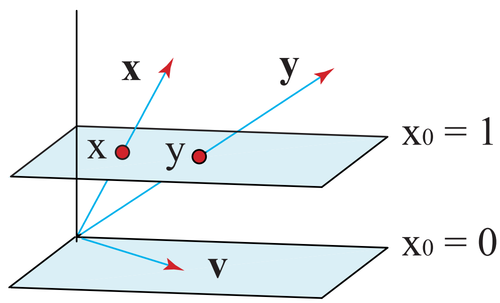

Figura 9: Construcción de los puntos del plano proyectivo

Con esta construcción hemos asignado a cada punto del plano afín $x_0 = 1$ un punto del plano proyectivo. El resto de puntos son los **puntos del infinito** y los podemos asociar con cada una de las direcciones horizontales de las rectas del plano $x_0 = 0$. Es decir, cada punto del infinito se corresponde con un vector, realmente con una recta de vectores.

Esta construcción heurística del plano proyectivo nos permite llevar por proyección al plano afín objetos que están definidos en el proyectivo, ampliando nuestro repertorio. Un punto del plano proyectivo, definido en $\mathbb{R}^3$ por el vector (x_0, x_1, x_2), o por cualquier otro de la recta $(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$, en **coordenadas homogéneas**, se refleja en el afín en el punto $(1, x_1/x_0, x_2/x_0)$ si $x_0 \neq 0$ en **coordenadas inhomogéneas**. En caso contrario, tal como queda dicho, se identifica con el vector $(0, x_1, x_2)$.