3. Propiedades de las curvas de Bézier

Aunque hayamos definido la curva en el intervalo $[0,1]$, es posible utilizar otros intervalos. Sólo hace falta transformar el intervalo por una sencilla aplicación afín para que la parametrización esté definida en el intervalo $[a,b]$,

$$t(u) = \frac{u-a}{b-a}, \quad u \in [a,b],$$

de modo que $u = a$ corresponde a $t = 0$ y $u = b$, a $t = 1$. La nueva parametrización será, pues,

$$\tilde{c}(u) = c(t(u)) := c\left(\frac{u-a}{b-a}\right), \quad u \in [a,b].$$

Nótese que la parametrización $c(t)$ no ve el intervalo $[a,b]$, sino el $[0,1]$. Es sólo un ajuste del usuario. Ejemplo.

Dos de los vértices del polígono de control tienen una interpretación inmediata. La curva pasa por los vértices c_0, c_n,

$$c(0) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_i^n(0) = c_0, \qquad c(1) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_i^n(1) = c_n. \ \square$$

De hecho, son los únicos vértices del polígono por los que pasa la curva. Ejemplo. Veremos más adelante que el resto de vértices están relacionados con las derivadas sucesivas de la parametrización.

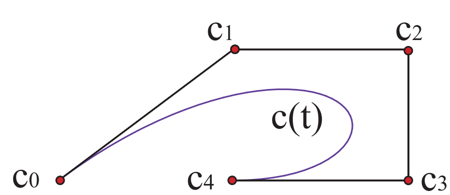

Figura 4: Una curva de Bézier siempre pasa por los vértices primero y último

El nombre de polígono de control hace referencia a que sirve para controlar la forma de la curva. Sin embargo, ese control no es local, ya que, desplazando un vértice, se mueve toda la curva, aunque principalmente la parte más próxima al vértice en cuestión. Ejemplo.

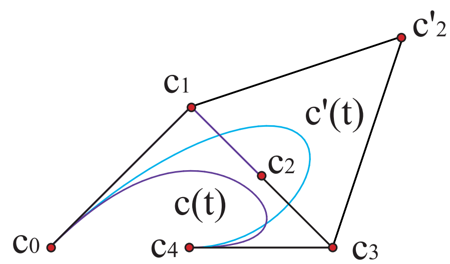

Figura 5: Control local: al mover el vértice c_2, se deforma mayormente la parte más próxima a él

La curva está contenida en la envolvente convexa del polígono de control. Así pues, como su nombre indica, el polígono nos proporciona una primera idea de por donde pasa la curva, lo cual puede ser muy útil, por ejemplo, para saber si dos curvas se cortan o no: si las envolventes de los polígonos no se cortan, las curvas no se cortan. Ejemplo.

Además, el hecho de que la expresión de la curva de Bézier sea una combinación baricéntrica facilita la transformación de la curva por una aplicación afín f, ya que

$$f(c(t)) = f\left(\sum_{i=0}^{n} c_i B_i^n(t)\right) = \sum_{i=0}^{n} f(c_i) B_i^n(t),$$

es decir, la curva imagen tiene por polígono de control la imagen del polígono primitivo, $\{f(c_0), \ldots, f(c_n)\}$. Por tanto, no es preciso calcular la imagen de cada punto para construir la curva imagen, sino sólo la imagen del polígono de control y recalcular la curva. Ejemplo.

Finalmente, una propiedad sencilla, pero importante, de las curvas de Bézier es su **simetría**. Si invertimos el polígono de control, $\{c_n, \ldots, c_0\}$, la gráfica de la curva es la misma que la correspondiente a $\{c_0, \ldots, c_n\}$, sólo que es recorrida en sentido inverso, de c_n en $t = 0$ a c_0 en $t = 1$. Ejemplo.

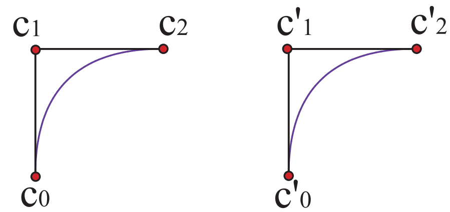

Figura 6: Para trasladar una curva de Bézier, basta trasladar su polígono de control

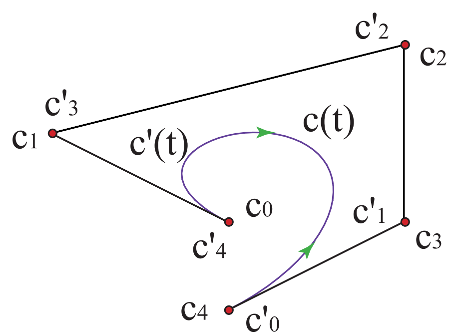

Figura 7: Para invertir el sentido de una curva de Bézier, basta invertir el orden de su polígono de control