# 5. Forma polar de una parametrización

Una construcción muy útil basada en el algoritmo de De Casteljau es el *blossom*, que denominaremos **forma polar** de la parametrización, debido a que está relacionado con esta del mismo modo que una forma cuadrática con su forma bilineal asociada, también llamada forma polar.

La idea es la siguiente. En vez de interpolar siempre para el mismo valor de $t$ en los $n$ pasos del algoritmo, interpolamos en el valor $t_1$ en el primer paso, en el valor $t_2$ en el segundo, $\ldots$, y en el valor $t_n$ en el último. Obtenemos así un punto que denotaremos $c[t_1, \ldots, t_n]$. No se corresponde con ningún punto de la curva, salvo en el caso trivial en el que todos los $t_i$ son iguales.

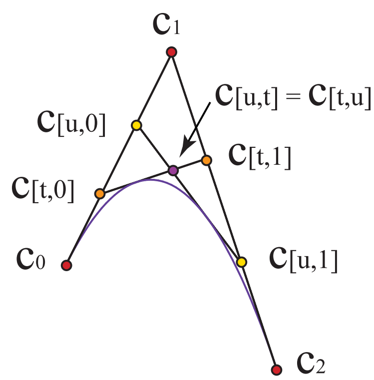


Figura 9: La forma polar es simétrica $c[t, u] = c[u, t]$.

Veámoslo con un ejemplo sencillo, el caso $n = 2$, para el polígono de control $\{c_0, c_1, c_2\}$:

$$\begin{aligned} c[t_1, t_2] &:= (1 - t_2)c_0^{1)}[t_1] + t_2 c_1^{1)}[t_1] \\ &= (1 - t_1)(1 - t_2)c_0 + \{t_1(1 - t_2) + t_2(1 - t_1)\}c_1 + t_1 t_2 c_2. \end{aligned}$$

A la vista de la expresión anterior, deducimos que la forma polar es simétrica, es decir, $c[t_1, t_2] = c[t_2, t_1]$. Este resultado se generaliza a curvas de grado $n$. Ejemplo.

La forma polar es que permite reconstruir el polígono de la curva de Bézier,

$$c[0^{<n-i>}, 1^{<i>}] = c_i, \qquad a^{<s>} = \underbrace{a, \ldots, a}_{s \text{ veces}}. \tag{5}$$

Este hecho puede parecer una trivialidad, ya que para calcular el polígono de control hemos de emplear la forman polar, que requiere a su vez el polígono de control. Sin embargo, es útil para obtener polígonos de control de curvas que se obtienen a partir de una dada, de la cual sí conocemos el polígono.

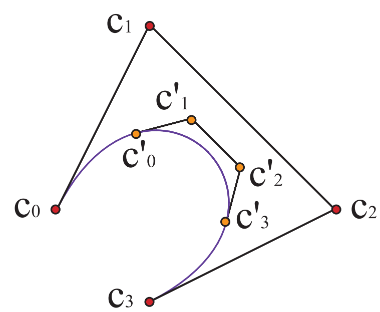


Figura 10: La forma polar nos permite obtener el polígono de una parte de una curva de Bézier

Por ejemplo, es útil para restringir el intervalo de definición de una curva de Bézier, $c(t)$, definida en el intervalo $[0, 1]$. Conocemos el polígono de control $\{c_0, \ldots, c_n\}$ de la curva primitiva, pero no el de su restricción, $\tilde{c}$, al intervalo $[a, b]$. Ejemplo. Los vértices del polígono de control de la curva restringida serán

$$\tilde{c}_i = \tilde{c}[0^{<n-i>}, 1^{<i>}] = c[a^{<n-i>}, b^{<i>}]. \tag{6}$$

Este resultado es muy potente, ya que permite calcular el polígono de control de cualquier tramo de una curva de Bézier. Nótese que la curva final está definida de nuevo en el intervalo $[0, 1]$. Ejemplo.