7. Derivadas

Vídeo de Derivación y elevación del grado

La derivada de la parametrización de una curva de Bézier, es decir, el campo tangente a la curva, se obtiene de manera sencilla,

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta c_i B_i^{n-1}(t), \tag{8}$$

definiendo el vector diferencia como $\Delta c_i = c_{i+1} - c_i$.

Este es un resultado interesante, ya que muestra que la derivada de una parametrización de Bézier de grado n es otra parametrización de Bézier de grado $n-1$ para una curva vectorial de polígono de control dado por $\{n\Delta c_0, \ldots, n\Delta c_{n-1}\}$.

Como la curva pasa por los vértices inicial y final, tenemos que

$$\left.\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = n\Delta c_0 = n(c_1 - c_0), \qquad \left.\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} = n\Delta c_{n-1} = n(c_n - c_{n-1}), \tag{9}$$

resultado que proporciona una interpretación a los vectores definidos por las parejas de vértices iniciales y finales. Indican las tangentes en los extremos de la curva, un dato importante para el diseño. Ejemplo.

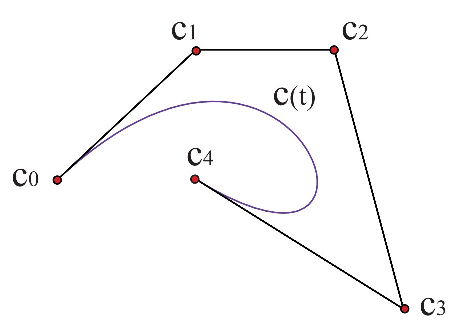

Figura 15: Los segmentos $\overline{c_0c_1}$, $\overline{c_3c_4}$ proporcionan las tangentes en c_0 y c_4, respectivamente

Esta expresión se puede generalizar a derivadas superiores por simple iteración:

$$\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}}c(t)}{\mathrm{d}t^r}=\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{i=0}^{n-r}\Delta^r c_i B_i^{n-r}(t),$$

donde las diferencias de orden superior se definen de manera recurrente como $\Delta^s c_i=\Delta^{s-1}c_{i+1}-\Delta^{s-1}c_i$.

Supongamos que deseamos enlazar dos curvas de Bézier de grado n, definidas en los intervalos adyacentes $[u_0,u_1]$, $[u_1,u_2]$, con polígonos respectivos $\{c_0,\dots,c_n\}$, $\{\tilde{c}_0,\dots,\tilde{c}_n\}$. Si la curva es continua, deberemos tener $c(u_1)=\tilde{c}(u_1)$, es decir, $c_n=\tilde{c}_0$.

Si además queremos que la curva compuesta definida en el intervalo $[u_0,u_2]$ tenga una parametrización de clase C^1, es decir, con tangente continua, deberemos exigir

$$\frac{\Delta c_{n-1}}{\Delta u_0}=\frac{\Delta\tilde{c}_0}{\Delta u_1}, \tag{10}$$

denotando $\Delta u_1=u_2-u_1$.

Nótese que el grado n ha desaparecido por cancelación en la expresión, con lo cual esta relación es independiente del grado de la curva. Es una simple condición geométrica sobre los vértices de los extremos adyacentes de las curvas que garantiza que la curva compuesta es de clase C^1. Ejemplo.

La condición para que la curva sea de clase C^r es fácil de deducir, a la vista de lo anterior,

$$\frac{\Delta^s c_{n-s}}{(\Delta u_0)^s}=\frac{\Delta^s\tilde{c}_0}{(\Delta u_1)^s},\quad s=0,\dots,r. \tag{11}$$

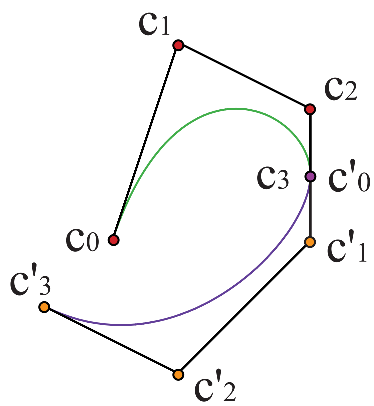

Figura 16: Los segmentos $\overline{c_0'c_1'}$, $\overline{c_2c_3}$ deben ser paralelos para que la curva compuesta tenga tangente continua