3. Propiedades de las curvas racionales

Muchas de las buenas propiedades de las curvas de Bézier se trasladan a las curvas racionales de manera inmediata, incluso de manera manifiestamente mejorada.

Para comenzar, seguimos empleando combinaciones baricéntricas de los vértices del polígono de control,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j B_j^n(t)} = 1.$$

Esto implica que las propiedades que se derivaban de este hecho para las curvas de Bézier, tales como que la curva está contenida en la envolvente convexa del polígono de control, la disminución de la variación o que sea invariante bajo transformaciones afines, se siguen manteniendo. Ejemplo.

Otras propiedades, como pasar por los vértices c_0, c_n o ser simétrica, se cumplen también.

De hecho, las curvas racionales son invariantes bajo transformaciones más generales, como son las transformaciones proyectivas. Si f es una transformación proyectiva del plano y $\{c_0, \ldots, c_n\}$, $\{w_0, \ldots, w_n\}$ son el polígono de control y la lista de pesos de una parametrización racional, entonces

$$c(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i c_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}, \qquad f(c(t)) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w'_i c'_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w'_i B_i^n(t)}, \tag{3}$$

donde los pesos y vértices de la nueva curva están relacionados con los primitivos, $\mathbf{c_i} = (w_i, w_i c_i)$, mediante la relación $\mathbf{c}'_i = \mathbf{f}(\mathbf{c_i}) = (w'_i, w'_i c'_i)$.

Estas transformaciones son muy importantes para el diseño, ya que, además de las afines, incluyen los cambios de perspectiva. Ejemplo.

En el caso de las curvas racionales, una transformación proyectiva de la recta, las transformaciones de Möbius, convierte una parametrización racional de grado n, $c(t)$, en otra parametrización racional del mismo grado para la misma curva, $\tilde{c}(u) = c(t(u))$,

$$t(u) = \frac{cu + d}{au + b}, \quad ad - bc \neq 0.$$

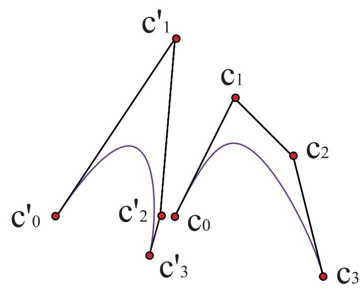

Figura 9: Transformación proyectiva de una curva racional

Nos limitaremos ahora a reparametrizar de modo que el intervalo final siga siendo el $[0,1]$, lo cual se consigue con transformaciones de la forma

$$t(u) = \frac{u}{(1-b)u+b}, \quad u \in [0,1]. \tag{4}$$

Con estas transformaciones, la parametrización se altera de manera sencilla, ya que el efecto se traduce en un cambio de pesos $\{\tilde{w}_0, \ldots, \tilde{w}_n\}$, $\tilde{w}_i = b^{n-i}w_i$, manteniéndose el mismo polígono de control, $\{c_0, \ldots, c_n\}$.

La gráfica no se altera, tan sólo la velocidad con la que se recorre la curva. Cuando $b < 1$, el efecto consiste en que la curva es recorrida más rápidamente al principio que al final (ver Fig. 10). Y al revés cuando $b > 1$. Ejemplo.

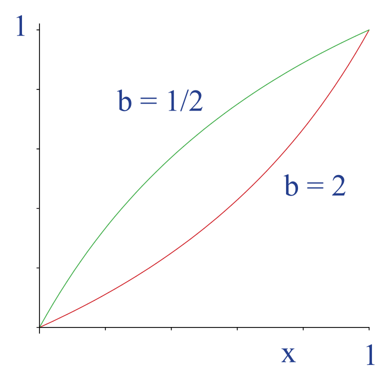

Figura 10: Gráficas de las transformaciones de Möbius para $b = 1/2, 2$

Podemos emplear la libertad de escoger b para fijar el valor de un peso.

Por ejemplo si tomamos $b = (w_n/w_0)^{1/n}$, conseguimos que los pesos primero y último sean iguales, $\tilde{w}_0 = w_n = \tilde{w}_n$.

Si combinamos este resultado con el estudiado en la sección anterior, observamos que podemos fijar los pesos inicial y final de la curva y tomarlos iguales a la unidad, $w_0 = 1 = w_n$.