7. Derivadas

Vídeo de Algoritmo de de Casteljau y Derivación

Si escribimos, para un polígono de control $\{c_0, \dots, c_n\}$ y una lista de pesos, $\{w_0, \dots, w_n\}$,

$$p(t) = w(t)c(t), \quad p(t) := \sum_{i=0}^{n} w_i c_i B_i^n(t), \quad w(t) := \sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t),$$

la expresión de la derivada de un producto nos proporciona la derivada de la parametrización racional,

$$p'(t) = w'(t)c(t) + w(t)c'(t) \Rightarrow c'(t) = \frac{p'(t)}{w(t)} - \frac{w'(t)}{w(t)}c(t).$$

Estas expresiones son harto complicadas, ya que involucran derivadas de orden inferior tanto del numerador como del denominador.

Como ya sabemos, por las fórmulas para las derivadas de parametrizaciones polinómicas,

$$c'(0) = n\frac{w_1}{w_0}\Delta c_0, \qquad c'(1) = n\frac{w_{n-1}}{w_n}\Delta c_{n-1}, \tag{7}$$

con lo cual, en lo que respecta a la primera derivada, la única novedad es la aparición de los pesos de los extremos. Ejemplo.

Por tanto, si tenemos dos curvas racionales definidas por sus polígonos de control, $\{c_0, \dots, c_n\}$, $\{\tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_n\}$, y sus listas de pesos, $\{w_0, \dots, w_n\}$, $\{\tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_n\}$, definidas en los respectivos intervalos $[u_0, u_1]$, $[u_1, u_2]$, la condición para que formen una única curva continua es

$$c(u_1) = \tilde{c}(u_1) \Rightarrow c_n = \tilde{c}_0, \tag{8}$$

que es la misma que la estudiada para curvas de Bézier.

Si además pretendemos que la parametrización sea de clase C^1, deberemos exigir

$$w_{n-1}\frac{\Delta c_{n-1}}{\Delta u_0} = \tilde{w}_1\frac{\Delta \tilde{c}_0}{\Delta u_1}. \tag{9}$$

A partir de la segunda derivada, las cosas se complican. Sin embargo, podemos aprovecharnos de la enorme libertad que ofrecen las parametrizaciones

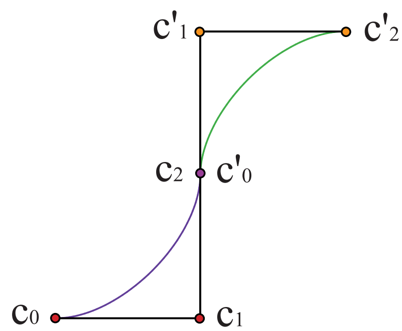

Figura 14: Si c_{n-1}, c_n, c'_1 están alineados, la tangente es continua

racionales para imponer una condición suficiente, aunque no necesaria, para que la parametrización de una curva compuesta sea de clase C^r.

$$\frac{\Delta^s(w_{n-s}c_{n-s})}{(\Delta u_0)^s} = \frac{\Delta^s(\tilde{w}_0\tilde{c}_0)}{(\Delta u_1)^s}, \qquad \frac{\Delta^s w_{n-s}}{(\Delta u_0)^s} = \frac{\Delta^s \tilde{w}_0}{(\Delta u_1)^s}, \qquad s = 0, \ldots, r. \quad (10)$$