13. Propiedades de las funciones B-spline

Consideremos funciones polinómicas a trozos definidas en un intervalo $[u_0, u_m]$, con partición $\{u_0, \ldots, u_m\}$, de modo que en cada intervalo $[u_i, u_{i+1}]$ las funciones son polinomios de grado n y en cada nudo u_i son de clase C^{n-r_i}. Estas funciones forman un espacio lineal. La dimensión del espacio de funciones spline de grado n y N tramos es $\dim = n + N = 1 + L$, es decir, coincide con el número de vértices de los polígonos B-spline.

Esto está de acuerdo con la idea de que podemos codificar el algoritmo de De Boor en unas funciones $\{N_0^n(u), \ldots, N_L^n(u)\}$, base de dicho espacio, de modo que, si el polígono de una curva es $\{d_0, \ldots, d_L\}$,

$$c(u) = \sum_{i=0}^{L} d_i N_i^n(u). \tag{25}$$

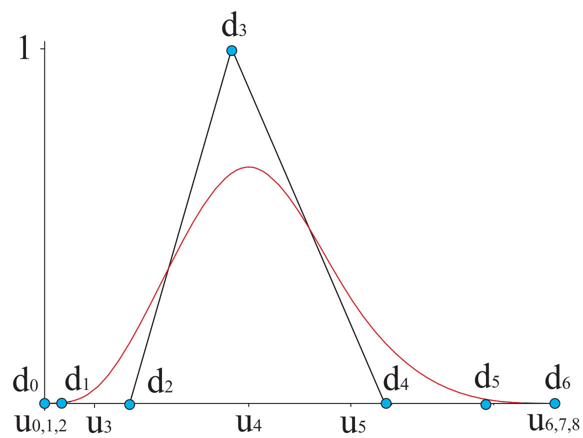

Figura 22: Relación entre una función nodal de grado tres y su polígono B-spline

Las funciones B-spline son polinómicas a trozos. El soporte, el intervalo cerrado fuera del cual la función $N_i^n(u)$ se anula, es $[u_{i-1}, u_{i+n}]$.

Una propiedad importante de las funciones nodales es que **el soporte es mínimo**. Cualquier función con soporte más corto que el de una función B-spline es necesariamente nulo.

Tenemos tantas funciones nodales linealmente independientes como dimensión tiene el espacio de funciones polinómicas a trozos, concluimos que las funciones nodales forman **base** de dicho espacio.

Una propiedad importante de los polinomios de Bernstein, fuente de numerosas propiedades de la curvas de Bézier era que formaban una **partición de la unidad**. Esta propiedad se mantiene en la base de funciones nodales,

$$\sum_{i=0}^{n+N-1} N_i^n(u) = 1, \qquad u \in [u_{n-1}, u_{n+N-1}]. \tag{26}$$