2. Parábolas C^1 a trozos

Vídeo de Parábolas a trozos

Consideremos una curva plana formada por N tramos parabólicos. Tendremos una colección de vértices $\{c_0, \ldots, c_{2N}\}$, en la cual $\{c_0, c_1, c_2\}$ es el polígono de control del primer tramo, $\{c_2, c_3, c_4\}$ es el polígono del segundo, $\{c_{2(i-1)}, c_{2i-1}, c_{2i}\}$, el del i-ésimo, y $\{c_{2N-2}, c_{2N-1}, c_{2N}\}$, el del último.

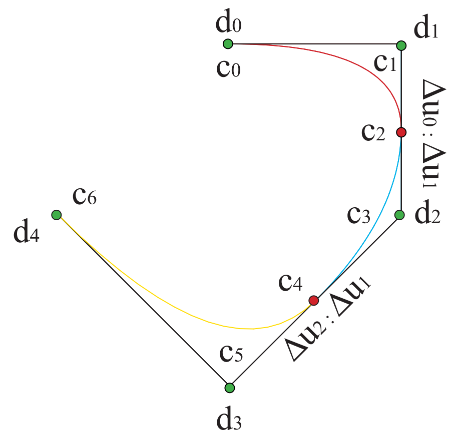

Figura 1: Parábola a trozos

Cada polígono definirá una parametrización en un intervalo. Así el primer tramo estará definido en un intervalo $[u_0, u_1]$, el segundo, en $[u_1, u_2]$, el i-ésimo, en $[u_{i-1}, u_i]$ y el último, en $[u_{N-1}, u_N]$.

Si queremos que la curva compuesta sea de clase C^1 en todo el intervalo $[u_0, u_N]$, tal como se estudió en el tema segundo, tendremos que exigir que lo sea para cada valor $u = u_i$,

$$\frac{\Delta c_{2i-1}}{\Delta u_{i-1}} = \frac{\Delta c_{2i}}{\Delta u_i}, \qquad i = 1, \ldots, N-1, \tag{1}$$

es decir, que los vectores $\mathbf{c_{2i-1}c_{2i}}$ y $\mathbf{c_{2i}c_{2i+1}}$ son paralelos y están en la proporción $\Delta u_{i-1} : \Delta u_i$.

Obviamente, las relaciones (1) no se mantienen si permitimos al usuario modificar *todos* los vértices. Por tanto, si queremos mantener la clase de diferenciabilidad, sólo deberemos ofrecerle los vértices que no afecten a dicha condición.

Con esta idea en mente, podemos ver (1) como la definición del vértice c_{2i}, conocidos los vértices c_{2i-1}, c_{2i+1},

$$c_{2i} = \frac{\Delta u_i}{\Delta u_{i-1} + \Delta u_i} c_{2i-1} + \frac{\Delta u_{i-1}}{\Delta u_{i-1} + \Delta u_i} c_{2i+1}, \tag{2}$$

que refleja el hecho de que la razón simple de los puntos c_{2i-1}, c_{2i}, c_{2i+1} es precisamente $[c_{2i-1}, c_{2i}, c_{2i+1}] = \Delta u_{i-1}/\Delta u_i$, tal como se refleja en la figura.

En resumen, los únicos datos de la curva que debemos facilitar al usuario para que los modifique libremente, sin alterar la condición de suavidad, son los nudos de la partición del intervalo, $\{u_0, \ldots, u_N\}$ y los vértices de los polígonos de control $\{c_0, c_1, \ldots, c_{2i-1}, \ldots, c_{2N-1}, c_{2N}\}$, es decir, un total de $N + 2$ vértices, como corresponde al hecho de que tenemos $2N + 1$ vértices y $N - 1$ condiciones de diferenciabilidad en las uniones. Ejemplo.

Vídeo de Ejemplo de tramo parabólico spline

Adelantando notación posterior, denotaremos como $\{d_0, \ldots, d_{N+1}\}$ estos vértices,

$$d_0 := c_0, \qquad d_i := c_{2i-1},\ i = 1, \ldots, N, \qquad d_{N+1} := c_{2N}. \tag{3}$$

A este conjunto de vértices lo denominaremos **polígono B-spline** de la curva polinómica a trozos.

Esta construcción de la curva de clase C^1 parabólica a trozos se podría emplear para interpolar una curva de clase C^1 entre $N + 1$ puntos del plano, $a_0, \ldots, a_N$, por los que sabemos que pasa para valores conocidos del parámetro u, $a_i = c(u_i)$. El problema se reduce, en función de los vértices $\{d_0, \ldots, d_{N+1}\}$, a resolver el sistema de ecuaciones $c_{2i} = a_i$,

$$\begin{aligned} a_0 &= d_0 \\ a_i &= \frac{\Delta u_i}{\Delta u_{i-1} + \Delta u_i} d_i + \frac{\Delta u_{i-1}}{\Delta u_{i-1} + \Delta u_i} d_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, N-1 \\ a_N &= d_{N+1}, \end{aligned} \tag{4}$$

que, obviamente es un sistema indeterminado, ya que consta, una vez eliminadas las dos ecuaciones triviales, de $N - 1$ ecuaciones lineales para N

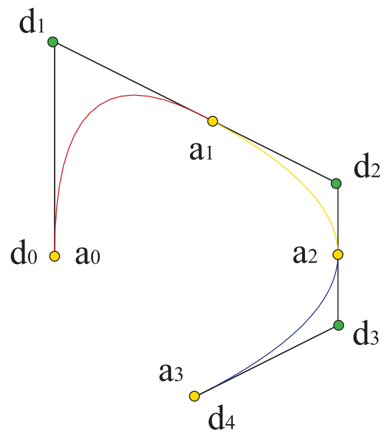

Figura 2: Parábola a trozos que interpola cuatro puntos

incógnitas, los vértices $d_1, \ldots, d_N$, lo cual nos lleva a tener que fijar, por ejemplo, una tangente en uno de los tramos. Esta sería una solución un tanto asimétrica del problema.

Obviamente, si la curva es cerrada, $c_0 = c_{2N+2}$, todo vértice par se obtiene a partir de los impares adyacentes por la relación (2) y sólo es preciso facilitar estos últimos, $\{c_1, \ldots, c_{2i-1}, \ldots, c_{2N+1}\}$. El vértice inicial-final se obtiene como caso particular,

$$\begin{aligned} c_0 &= c_{2N+2} = \frac{\Delta u_0}{\Delta u_N + \Delta u_0} c_{2N+1} + \frac{\Delta u_N}{\Delta u_N + \Delta u_0} c_1 \\ c_{2N} &= \frac{\Delta u_{N-1}}{\Delta u_{N-1} + \Delta u_N} c_{2N+1} + \frac{\Delta u_N}{\Delta u_{N-1} + \Delta u_N} c_{2N-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

El polígono B-spline, $\{d_0, \ldots, d_N\}$, está formado por los vértices interiores, $d_0 = c_{2N+1}$, $d_i = c_{2i-1}$, $i = 1, \ldots, N$. .

La matriz de este problema es regular para N par. Luego tenemos garantizada la solución única del problema de interpolación exclusivamente para un número impar de puntos, lo cual no quiere decir que no haya solución en todos los casos. Luego no es un método afortunado de interpolación. Ejemplo.

Es claro que, como la parábola es una curva plana, esta construcción sólo es válida en el plano.

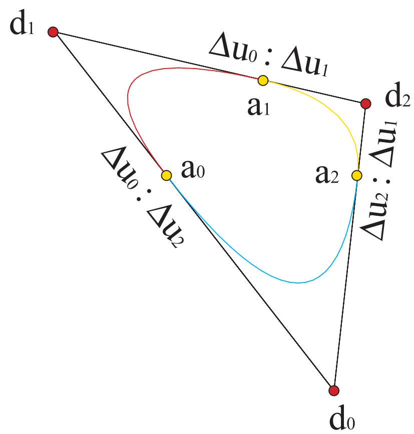

Figura 3: Parábola a trozos cerrada

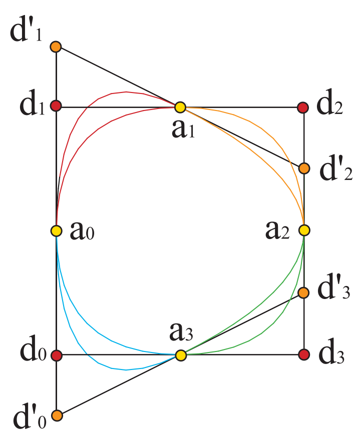

Figura 4: Dos soluciones para el problema de interpolación de cuatro puntos