

3. Cúbicas C^2 a trozos

Vídeo de Cúbicas a trozos

Para abordar el problema de interpolación en el espacio, debemos recurrir a este tipo de curvas. Buscaremos construir una curva de clase C^2 de N tramos. Tendremos, pues, como vértices de los sucesivos polígonos de control $\{c_0, \dots, c_{3N}\}$, de los cuales $\{c_{3(i-1)}, c_{3i-2}, c_{3i-1}, c_{3i}\}$ corresponden al tramo i -ésimo, definido en el intervalo $[u_{i-1}, u_i]$.

Vamos a imponer que la parametrización sea de clase C^2 en $u = u_i$, unión de los tramos i e $(i+1)$ -ésimo. Como en el apartado anterior, la condición de ser de clase C^1 se traduce en

$$\frac{\Delta c_{3i-1}}{\Delta u_{i-1}} = \frac{\Delta c_{3i}}{\Delta u_i}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (6)$$

$$c_{3i} = \frac{\Delta u_i}{\Delta u_{i-1} + \Delta u_i} c_{3i-1} + \frac{\Delta u_{i-1}}{\Delta u_{i-1} + \Delta u_i} c_{3i+1}, \quad (7)$$

es decir, los vectores $\mathbf{c}_{3i-1}\mathbf{c}_{3i}$ y $\mathbf{c}_{3i}\mathbf{c}_{3i+1}$ son paralelos y están en proporción $\Delta u_{i-1} : \Delta u_i$.

Finalmente, la condición de continuidad de las derivadas segundas, desarrollada en el tema segundo, aplicada al nudo u_i nos proporciona como información que los vectores $\mathbf{c}_{3i-2}\mathbf{c}_{3i-1}$ y $\mathbf{c}_{3i-1}\mathbf{d}_i$ están en proporción $\Delta u_{i-1} : \Delta u_i$, igual que los vectores $\mathbf{d}_i\mathbf{c}_{3i+1}$ y $\mathbf{c}_{3i+1}\mathbf{c}_{3i+2}$.

Aplicando esta misma condición al nudo u_{i+1} obtenemos otra relación. Los vectores $\mathbf{c}_{3i+1}\mathbf{c}_{3i+2}$ y $\mathbf{c}_{3i+2}\mathbf{d}_{i+1}$ están en proporción $\Delta u_i : \Delta u_{i+1}$. Y del nudo u_{i-1} extraemos que $\mathbf{d}_{i-1}\mathbf{c}_{3i-2}$ y $\mathbf{c}_{3i-2}\mathbf{c}_{3i-1}$ guardan una proporción igual a $\Delta u_{i-2} : \Delta u_{i-1}$.

Con toda esta información, estamos en condiciones de expresar los vértices c_{3i-1} , c_{3i+1} en términos de los nuevos puntos que hemos introducido,

$$\begin{aligned} c_{3i-1} &= \frac{\Delta u_i}{\Delta u_{i-2} + \Delta u_{i-1} + \Delta u_i} d_{i-1} + \frac{\Delta u_{i-2} + \Delta u_{i-1}}{\Delta u_{i-2} + \Delta u_{i-1} + \Delta u_i} d_i, \\ c_{3i+1} &= \frac{\Delta u_i + \Delta u_{i+1}}{\Delta u_{i-1} + \Delta u_i + \Delta u_{i+1}} d_i + \frac{\Delta u_{i-1}}{\Delta u_{i-1} + \Delta u_i + \Delta u_{i+1}} d_{i+1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Este resultado, combinado con (7) nos permite obtener todos los vértices de la curva compuesta a partir de los puntos d_1, \dots, d_{N-1} , garantizando que la parametrización es de clase C^2 . Quedan fuera los vértices que no son

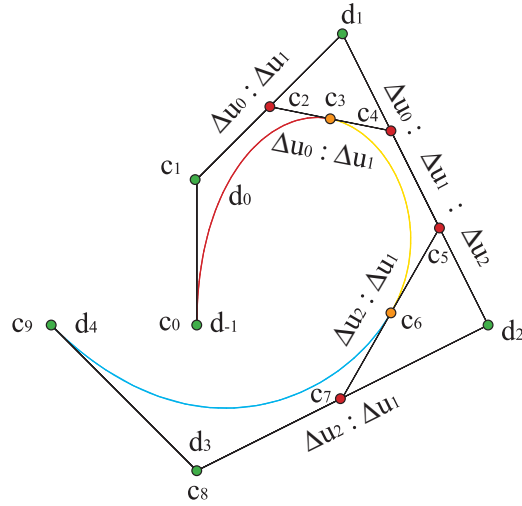


Figura 5: Cúbica a trozos

adyacentes a ninguna unión, es decir, los vértices iniciales, c_0 , c_1 , y finales, c_{3N-1} , c_{3N} , que no pueden obtenerse por estas relaciones.

Denotaremos, como hicimos en el apartado anterior, $d_{-1} := c_0$, $d_0 := c_1$, $d_N := c_{3N-1}$, $d_{N+1} := c_{3N}$, para poder completar la relación de vértices. Los restantes vértices, c_2, c_{3N-2} se obtienen a partir de (8) tomando Δu_{-1} y Δu_N nulos.

Realmente, la notación usual es la correlativa de 0 hasta $N + 2$, para lo cual deberíamos adelantar los índices en una unidad. Esta será la notación que vamos a seguir.

Una vez más, en el caso de curvas cerradas, no hace falta añadir más puntos y todos los vértices se obtienen a partir de (7) y (8).

Por ello, podemos codificar la curva compuesta por medio del **polígono de control B-spline**, $\{d_0, \dots, d_{N+2}\}$ y la sucesión de nudos $\{u_0, \dots, u_N\}$ de modo que el usuario podrá modificar la forma de la curva sin alterar sus propiedades de diferenciabilidad.

Sustituyendo las expresiones de los vértices c_{3i-1} y c_{3i+1} en (7),

$$\begin{aligned}
c_{3i} &= \frac{\alpha_i d_i + \beta_i d_{i+1} + \gamma_i d_{i+2}}{\Delta u_{i-1} + \Delta u_i}, \\
\alpha_i &:= \frac{(\Delta u_i)^2}{\Delta u_{i-2} + \Delta u_{i-1} + \Delta u_i}, \\
\beta_i &:= \left(\Delta u_i \frac{\Delta u_{i-2} + \Delta u_{i-1}}{\Delta u_{i-2} + \Delta u_{i-1} + \Delta u_i} + \Delta u_{i-1} \frac{\Delta u_i + \Delta u_{i+1}}{\Delta u_{i-1} + \Delta u_i + \Delta u_{i+1}} \right), \\
\gamma_i &:= \frac{(\Delta u_{i-1})^2}{\Delta u_{i-1} + \Delta u_i + \Delta u_{i+1}}, \tag{9}
\end{aligned}$$

vemos que c_{3i} depende de tres vértices consecutivos del polígono B-spline.

Esta relación es útil para resolver el problema de interpolación: dados $N + 1$ puntos a_0, \dots, a_N y los nudos $\{u_0, \dots, u_N\}$, obtener la curva de clase C^2 cúbica a trozos que verifique $c(u_i) = a_i$. El problema se reduce al sistema lineal (9), donde los datos son $c_0 = d_0 = a_0$, $c_{3i} = a_i$, $i = 1, \dots, N - 1$, $a_N = d_{N+2} = c_{3N}$ y las incógnitas son los vértices del polígono B-spline, $\{d_0, \dots, d_{N+2}\}$. Tenemos, pues, $N + 3$ incógnitas para $N + 1$ datos, así que el sistema tiene dos parámetros libres, por ejemplo, d_1 y d_{N+1} . Se puede demostrar que el sistema tiene rango $N + 1$, así que el problema tiene solución única, una vez introducidos los valores de los vértices libres.

Vídeo de Interpolación cúbica

Existen varias maneras de fijar estos vértices, imponiendo condiciones razonables a la curva.

Una posibilidad son las **condiciones naturales**, que imitan el comportamiento físico del junquillo, el cual tiende a ser recto en los extremos. Por tanto, la condición natural es

$$c''(u_0) = 0 = c''(u_N). \tag{10}$$

No obstante, estas condiciones no son muy apreciadas en el diseño, precisamente porque provocan que los extremos de las curvas sean excesivamente rectos.

Otra opción consiste en elegir las tangentes en los extremos, $c'(u_0)$, $c'(u_N)$, que determinan a su vez los vértices d_1 , d_{N+1} .

Una manera práctica de prescribir las tangentes son las **condiciones de Bessel**, que consisten en tomar como valor de $c'(u_0)$ la derivada en el origen

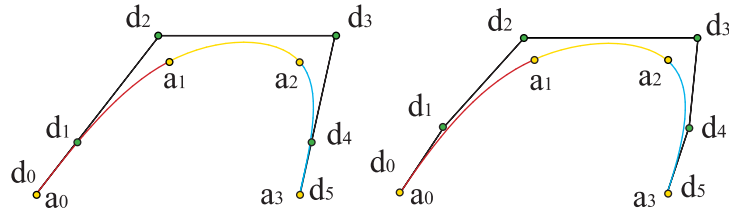


Figura 6: Interpolación con condiciones naturales y con tangentes de Bessel

de la parábola que pasa por los puntos a_0, a_1, a_2 y, análogamente, $c'(u_N)$ será la derivada en u_N de la parábola que interpola a_{N-2}, a_{N-1}, a_N .

Las tangentes de Bessel proporcionan resultados mucho mejores que la condición natural. [Ejemplo](#).

En el caso de curvas cerradas, como se ha indicado, no son precisos vértices ni datos adicionales y el sistema se cerraría en forma periódica.

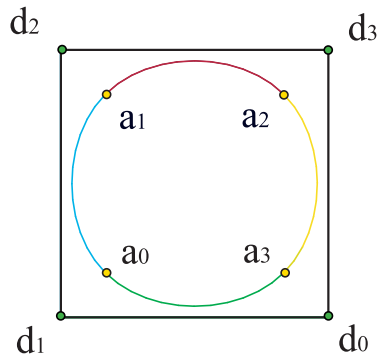


Figura 7: Interpolación con cúbica a trozos cerrada