4. Cúbicas C^1 a trozos

Un problema alternativo al anterior sería la interpolación con cúbicas, conocidos los puntos de la curva $c(u_i)$ y las tangentes a la curva, de clase C^1 al menos en dichos puntos.

Supongamos que tenemos $N+1$ puntos $\{a_0,\ldots,a_N\}$ y $N+1$ vectores $\{v_0,\ldots,v_N\}$ y queremos trazar una curva interpolante $c(u)$ que verifique $c(u_i)=a_i$, $c'(u_i)=v_i$, $i=0,\ldots,N$ para una sucesión creciente de valores del parámetro u, $\{u_0,\ldots,u_N\}$.

Una solución sencilla para este problema nos la proporciona una cúbica a trozos de clase C^1 con N tramos. Al igual que en el caso anterior, la curva requiere $3N+1$ vértices $\{c_0,\ldots,c_{3N}\}$, de los cuales $N+1$, los extremos de las cúbicas, están determinados por las condiciones $c_{3i}=a_i$, $i=0,\ldots,N$. El resto están determinados por las tangentes.

Teniendo en cuenta las expresiones para las derivadas en los extremos de cada cúbica, estudiadas previamente,

$$\begin{aligned} v_i &= c'(u_i) = 3\frac{c_{3i+1}-c_{3i}}{\Delta u_i}, \qquad i=0,\ldots,N-1,\\ v_i &= c'(u_i) = 3\frac{c_{3i}-c_{3i-1}}{\Delta u_{i-1}}, \qquad i=1,\ldots,N, \end{aligned}$$

respectivamente para el extremo inicial y final de cada tramo. De aquí podemos despejar los vértices interiores de cada polígono,

$$\begin{aligned} c_{3i+1} &= c_{3i}+\frac{\Delta u_i}{3}v_i, \qquad i=0,\ldots,N-1,\\ c_{3i-1} &= c_{3i}-\frac{\Delta u_{i-1}}{3}v_i, \qquad i=1,\ldots,N, \end{aligned} \tag{11}$$

así que en este caso no hay grados de libertad adicionales y la curva queda determinada unívocamente.

Sin embargo, para codificar la información de la curva, no es preciso una vez más dar todos los vértices, sino tan sólo los interiores, ya que los vértices exteriores se despejan de las relaciones anteriores,

$$c_{3i}=\frac{\Delta u_{i-1}c_{3i+1}+\Delta u_i c_{3i-1}}{\Delta u_{i-1}+\Delta u_i}, \qquad i=1,\ldots,N-1, \tag{12}$$

salvo los vértices inicial y final, c_0, c_{3N}. Por tanto, podemos caracterizar la curva por la sucesión de nudos $\{u_0,\ldots,u_N\}$ y los vértices del **polígono**

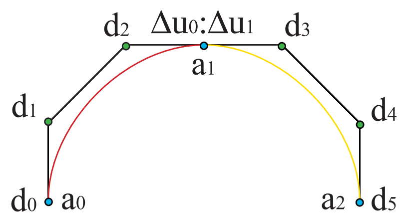

Figura 8: Interpolación C^1 con cúbicas a trozos

B-spline, $\{d_0, \ldots, d_{2N+1}\}$, dado por $d_0 := c_0$, $d_{2i-1} = c_{3i-2}$, $d_{2i} = c_{3i-1}$, $i = 1, \ldots, N$, $d_{2N+1} = c_{3N}$,

$$c_{3i} = \frac{\Delta u_{i-1} d_{2i+1} + \Delta u_i d_{2i}}{\Delta u_{i-1} + \Delta u_i}, \qquad i = 1, \ldots, N-1. \tag{13}$$

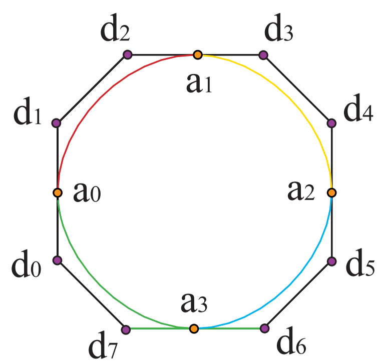

Figura 9: Interpolación C^1 cerrada con cúbicas a trozos

El caso de curvas cerradas que interpolen los $N+1$ puntos y tangentes es aún más sencillo: las expresiones (11-13) son válidas también para los casos extremos $i = 0, N$ sin más que tomar $\Delta u_{-1} := \Delta u_N$, para lo cual necesitamos un nudo mas, u_{N+1}, el que cierra la curva mediante las condiciones $a_0 = c(u_{N+1})$, $v_0 = c'(u_{N+1})$.