5. Curvas B-spline

Vídeo de Curvas B-spline

De los ejemplos anteriores podemos inferir ciertas propiedades de las curvas de grado n de clase C^{n-1} a trozos con N tramos:

- Se definen con un polígono B-spline de $n+N$ vértices $\{d_0, \ldots, d_{n+N-1}\}$ y una lista de $2n+N-1$ nudos $\{u_0, \ldots, u_{2n+N-2}\}$.
- La curva está definida en el intervalo de N tramos $[u_{n-1}, u_{n+N-1}]$.
- Los $n-1$ primeros nudos y los últimos son nudos auxiliares y se toman respectivamente iguales a u_{n-1} y a u_{n+N-1}.
- Es decir, la lista de nudos comienza con n nudos iguales $u_0 = \cdots = u_{n-1}$ y acaba con otros n nudos iguales $u_{n+N-1} = \cdots = u_{2n+N-2}$.
- Los vértices se definen a partir de la forma polar evaluada sobre listas de nudos correlativos, $d_i = c[u_i, \ldots, u_{i+n-1}]$.
- La clase de diferenciabilidad en un nudo interior u_i baja a C^{n-r} si dicho nudo está repetido r veces. De esta propiedad nos ocuparemos más adelante.

Queda por ver cómo expresar el algoritmo de De Casteljau con polígonos B-spline y nudos, ya que resultaría engorroso tener que pasar de nuevo por los polígonos de control de cada tramo, vía forma polar, para poder aplicar el algoritmo.

Para ilustrarlo, comenzamos con un parábola de un sólo tramo, los pasos seguidos en el algoritmo han sido:

$$\begin{array}{ll} r=0) & c[u_0,u_1], c[u_1,u_2], c[u_2,u_3] \\ r=1) & c[u_1,u], c[u,u_2] \\ r=2) & c[u,u], \end{array} \tag{14}$$

donde cada paso consiste en la interpolación en u en el intervalo formado por los nudos distintos de los vértices correlativos. Ejemplo. Este es el **algoritmo de De Boor** para una curva parabólica de un único tramo. Ejemplo.

El algoritmo se generaliza sin dificultad a curvas de cualquier grado, n, y un solo tramo:

$$\begin{aligned}
d_i^{1)}(u) &:= c[u_{i+1},\ldots,u_{i+n-1},u], \qquad i=0,\ldots,n-1,\\
&= \frac{u_{i+n}-u}{u_{i+n}-u_i}d_i+\frac{u-u_i}{u_{i+n}-u_i}d_{i+1},\\
d_i^{r)}(u) &:= c[u_{i+r},\ldots,u_{i+n-1},u^{<r>}],\ i=0,\ldots,n-r,\ r=1,\ldots,n,\\
&= \frac{u_{i+n}-u}{u_{i+n}-u_{i+r-1}}d_i^{r-1)}(u)+\frac{u-u_{i+r-1}}{u_{i+n}-u_{i+r-1}}d_{i+1}^{r-1)}(u),\\
d_0^{n)}(u) &:= c[u^{<n>}]=\frac{u_n-u}{u_n-u_{n-1}}d_0^{n-1)}(u)+\frac{u-u_{n-1}}{u_n-u_{n-1}}d_1^{n-1)}(u). \qquad (15)
\end{aligned}$$

Por supuesto, $c(u)=d_0^{n)}(u)$. La parametrización está definida en el intervalo final, $[u_{n-1},u_n]$. Ejemplo.

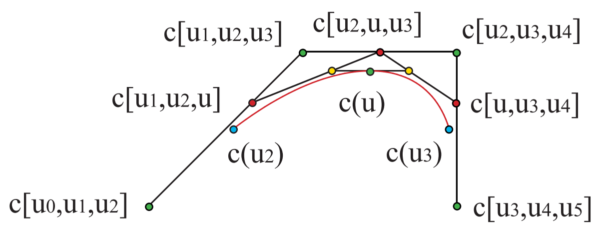

Figura 10: Algoritmo de De Boor para una cúbica

A pesar de su aparente complejidad, este algoritmo es recursivo.