7. Algoritmo de De Boor

Vídeo de Algoritmo de De Boor

El algoritmo de De Boor se puede extender a curvas compuestas de N tramos polinómicos de grado n, que es para lo que estaba ideado inicialmente. Consideremos una colección de vértices $\{d_0, \ldots, d_{n+N-1}\}$ y una sucesión de nudos $\{u_0, \ldots, u_{2n+N-2}\}$. El primer tramo de curva está parametrizado en el intervalo $[u_{n-1}, u_n]$, de acuerdo con el algoritmo ya estudiado, por los vértices $\{d_0, \ldots, d_n\}$ y los nudos $\{u_0, \ldots, u_{2n-1}\}$. El segundo tramo corresponde a los vértices $\{d_1, \ldots, d_{n+1}\}$ y a los nudos $\{u_1, \ldots, u_{2n}\}$ y está definido en $[u_n, u_{n+1}]$. Y así sucesivamente, el tramo i-ésimo tiene por polígono $\{d_{i-1}, \ldots, d_{n+i-1}\}$, sucesión de nudos $\{u_{i-1}, \ldots, u_{2n+i-2}\}$ y su intervalo de definición es $[u_{n+i-2}, u_{n+i-1}]$. Finalmente, el último tramo de curva tiene por polígono $\{d_{N-1}, \ldots, d_{n+N-1}\}$, nudos $\{u_{N-1}, \ldots, u_{2n+N-2}\}$ y está definido en $[u_{n+N-2}, u_{n+N-1}]$. Ejemplo.

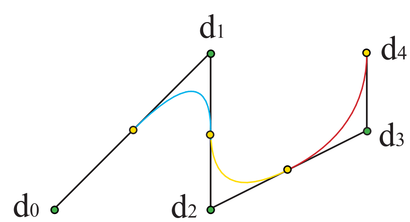

Figura 12: Curva spline parabólica de tres tramos. El nudo final está repetido

Así pues, una curva de N tramos y grado n tiene $n + N$ vértices y $2n + N - 1$ nudos y está definida en el intervalo $[u_{n-1}, u_{n+N-1}]$. Los $n - 1$ nudos iniciales y finales son auxiliares. Lo normal es tomarlos iguales al nudo inicial o final, respectivamente, $u_0 = \cdots = u_{n-1}$, $u_{n+N-1} = \cdots = u_{2n+N-2}$, tal como hicimos, sin indicarlo, en los apartados precedentes, donde no aparecían tales nudos auxiliares. El motivo no es otro que forzar a la curva a pasar por los vértices inicial y final, $d_0 = c(u_{n-1})$, $d_{n+N-1} = c(u_{n+N-1})$. Así pues, lo común es que la sucesión de nudos comience, y acabe, con un nudo repetido n veces.

Como es fácil de imaginar, la repetición de un nudo no auxiliar, por ejemplo, $u_I = u_{I+1}$, supone la desaparición del tramo de curva correspondiente, en este caso el $(I - n + 1)$-ésimo, que queda reducido a un punto. También supone, como veremos, rebajar en una unidad la clase de diferenciabilidad de la curva en dicha unión.

Sólo resta, pues, saber cómo aplicar el algoritmo de De Boor a cada uno de los tramos para construir la curva compuesta.

Supongamos que queremos evaluar la curva en un valor u del parámetro. Tendremos que averiguar en qué intervalo $[u_I, u_{I+1})$ está contenido y aplicar el algoritmo de De Boor al polígono correspondiente a ese tramo, $\{\tilde{d}_0 := d_{I-n+1}, \ldots, \tilde{d}_n := d_{I+1}\}$ y a los nudos $\tilde{u}_0 := u_{I-n+1}, \ldots, \tilde{u}_{2n-1} := u_{I+n}$, tal como se explica en (15).

La extensión a curvas racionales a trozos es bastante sencilla, pues, como vimos en el tema anterior, las parametrizaciones racionales en $\mathbb{A}^n$ se obtienen a partir de parametrizaciones polinómicas en $\mathbb{R}^{n+1}$, donde la componente adicional corresponde al denominador de la parametrización. Así pues, introduciendo una componente más, el algoritmo de De Boor es aplicable a curvas racionales, sin más que dividir por la coordenada adicional.