8. Propiedades de las curvas polinómicas a trozos

Vídeo de Propiedades de Curvas spline

El algoritmo de De Boor expresa que las parametrizaciones de las curvas polinómicas a trozos son combinaciones baricéntricas de los vértices del polígono B-spline, así que disfrutan de las mismas propiedades que las curvas de Bézier, tales como la invariancia afín, disminución de la variación, envolvente convexa... En el caso de las curvas racionales, se mantiene la invariancia proyectiva. Otras, como pasar por los vértices inicial y final, dependen de la elección de los nudos auxiliares, aunque ya hemos dicho que no es común tomarlos distintos de los nudos inicial y final de la parametrización. Ejemplo.

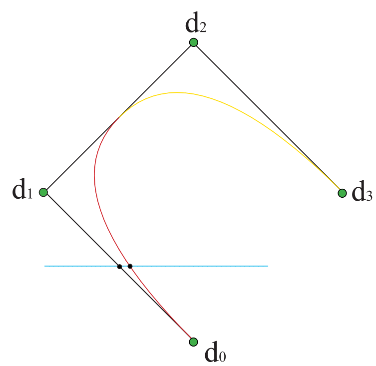

Figura 13: Disminución de la variación: una recta corta al tramo de una curva en a lo sumo tantos puntos como a su tramo de polígono

Como en el algoritmo de De Boor sólo intervienen cocientes de diferencias de valores del parámetro u, la parametrización es insensible a cambios afines de parámetro $\tilde{u} = au + b$, siempre que transformemos los nudos de idéntica manera, $\tilde{u}_i = au_i + b$, $i = 0, \dots, 2n + N - 2$.

Más aún, como en cada intervalo las curvas spline son curvas polinómicas, gozan de las propiedades que ya estudiamos para estas, no sólo globalmente, sino en cada tramo concreto. Así cada tramo de curva, por ejemplo el i-ésimo, está contenido en la envolvente convexa de su polígono de control,

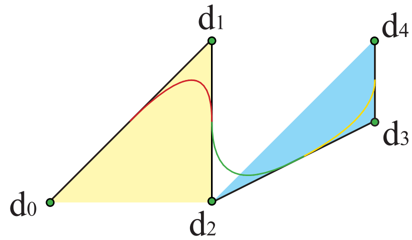

Figura 14: Cada tramo está contenido en la envolvente convexa de su polígono

$\{d_{i-1}, \ldots, d_{i+n-1}\}$. Lo mismo sucede con la propiedad de la disminución de la variación. Una recta corta al tramo i-ésimo de la curva en a lo sumo tantos puntos como al polígono de control de dicho tramo. Ejemplo.

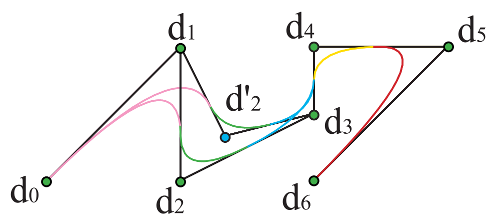

Figura 15: Control local: un vértice de un spline parabólico controla tres tramos de curva

Finalmente, hay propiedades que presentan una mejora sustancial. Cada tramo de la curva depende exclusivamente de los $n+1$ vértices de su polígono de control. Por tanto, no se ve afectado por los cambios de los demás vértices. Visto de otro modo, un vértice genérico d_i pertenece a los polígonos de control de todos los tramos desde el $(i-n+1)$-ésimo, $\{d_{i-n}, \ldots, d_i\}$, hasta el $(i+1)$-ésimo, $\{d_i, \ldots, d_{i+n}\}$. Así pues, un desplazamiento del vértice d_i modifica tan sólo a un total de $n+1$ tramos de la curva. Obviamente, si el vértice está próximo al comienzo o al final del polígono, controlará un número inferior de tramos. Por ejemplo, el vértice inicial, d_0, sólo afecta al primer tramo. A esta propiedad se la denomina **control local** y no existía para las curvas de Bézier, donde la modificación de un vértice afectaba a toda la curva. Ejemplo. Ejemplo.