

2. Superficies de Bézier

Vídeo de Superficies de Bézier

Como parece natural, no nos va a interesar que los vértices evolucionen a lo largo de curvas arbitrarias $c_i(v)$, sino según curvas cuya modelización sea sencilla. La propuesta más obvia es que sean a su vez curvas de Bézier de grado n , con polígonos de control respectivos $\{c_{i,0}, \dots, c_{i,n}\}$. De este modo, la parametrización de la superficie resultante,

$$\begin{aligned} c(u, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v), \quad u, v \in [0, 1], \\ &= \begin{pmatrix} B_0^m(u) & \cdots & B_m^m(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,0} & \cdots & c_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^n(v) \\ \vdots \\ B_n^n(v) \end{pmatrix}, \quad (1) \end{aligned}$$

será una superficie de bigrado (m, n) y estará descrita por una **mall**a de control de $(m + 1)(n + 1)$ vértices, $\{c_{0,0}, \dots, c_{m,n}\}$. [Ejemplo](#).

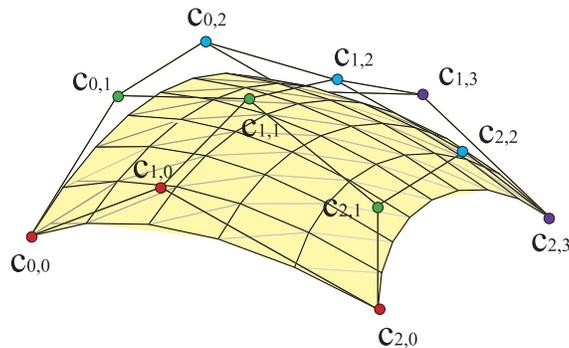


Figura 2: Superficie de bigrado (2, 3)

De este modo, logramos cierta simetría en la representación, ya que las curvas de parámetro u constante son curvas de Bézier de grado n y polígono de vértices $c_j = (\sum_i c_{i,j} B_i^m(u_0))$. Mientras que las curvas de parámetro v constante son curvas de grado m y vértices $c_i = (\sum_j c_{i,j} B_j^n(v_0))$. [Ejemplo](#).

Por tanto, nuestra superficie es una malla formada por curvas de grado m y n .

Las $(m + 1)(n + 1)$ funciones que estamos empleando en estas parametrizaciones son el producto de las bases de los polinomios de grado m en la variable u y de grado n en la variable v , $\{B_0^m(u)B_0^n(v), \dots, B_m^m(u)B_n^n(v)\}$, que forman base del espacio de polinomios de bigrado (m, n) en las variables (u, v) . Como este espacio es producto de los espacios anteriores de polinomios,

$$\mathbb{R}_{m,n}[u, v] = \mathbb{R}_m[u]\mathbb{R}_n[v], \quad (2)$$

a estas superficies se las denomina a veces **superficies producto tensorial de bigrado** (m, n) .

Al igual que sucedía con las curvas no paramétricas, nuestro formalismo permite representar gráficas de funciones polinómicas de dos variables, $f(u, v)$, ya que las podemos parametrizar como $c(u, v) = (u, v, f(u, v))$. [Ejemplo](#).

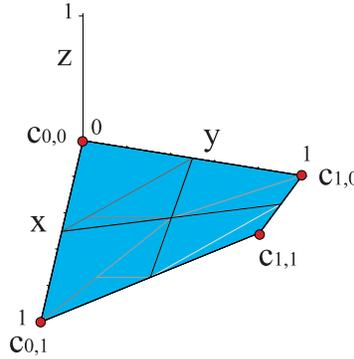


Figura 3: Gráfica de la función $f(x, y) = xy$

Ese procedimiento se traslada automáticamente a nuestro caso. Si expresamos $f(x, y)$ como combinación de una malla de control sobre la recta real, $\{\hat{c}_{0,0}, \dots, \hat{c}_{m,n}\}$, la gráfica de la función estará determinada por su malla de control $\{c_{0,0}, \dots, c_{m,n}\}$, cuyos vértices son

$$c_{i,j} = \left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}, \hat{c}_{i,j} \right). \quad (3)$$

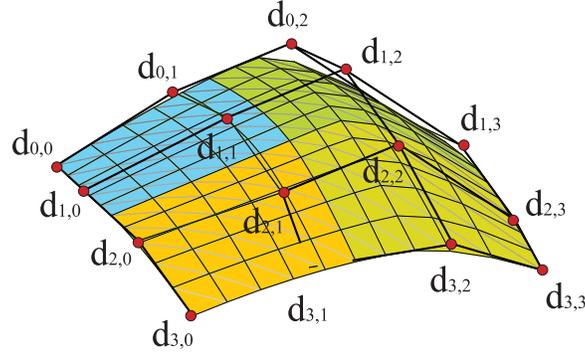


Figura 4: Superficie B-spline de bigrado (2,2) y cuatro tramos

La representación producto tensorial se adapta asimismo para construir superficies B-spline. Sólo hay que sustituir los polinomios de Bernstein por las funciones B-spline. Así pues, para determinar una superficie B-spline de bigrado (m, n) y $M \times N$ tramos, será preciso indicar dos sucesiones de nudos, $\{u_0, \dots, u_{2m+M-2}\}$, $\{v_0, \dots, v_{2n+N-2}\}$ y una malla B-spline formada por los vértices $\{d_{0,0}, \dots, d_{m+M-1, n+N-1}\}$. La parametrización,

$$c(u, v) = \sum_{i=0}^{m+M-1} \sum_{j=0}^{n+N-1} d_{i,j} N_i^m(u) N_j^n(v), \quad (4)$$

está definida en el recinto $[u_{m-1}, u_{m+M-1}] \times [v_{n-1}, v_{n+N-1}]$.

Al igual que sucedía con las curvas B-spline, lo más común es que las sucesiones comiencen y acaben con m y n nudos repetidos. [Ejemplo](#).

Al aumentar un peso, la superficie se acerca al vértice correspondiente de la malla. [Ejemplo](#).

Todos los algoritmos estudiados para curvas polinómicas a trozos, tales como el algoritmo de inserción, el algoritmo de De Boor, el algoritmo de obtención de polígonos de control, ... siguen siendo útiles para superficies de Bézier. Algunos de ellos sólo requieren que los apliquemos a la malla de control en dos pasadas, una para las filas y otra para las columnas.

Tampoco causa mayor trastorno la inclusión de pesos, $\{w_{i,j}\}$, para obtener

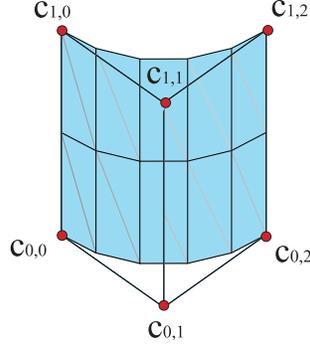


Figura 5: La inclusión de pesos permite representar un cilindro de manera exacta

superficies racionales y racionales a trozos,

$$c(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} c_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}, \quad (5)$$

$$c(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{m+M-1} \sum_{j=0}^{n+N-1} w_{i,j} d_{i,j} N_i^m(u) N_j^n(v)}{\sum_{i=0}^{m+M-1} \sum_{j=0}^{n+N-1} w_{i,j} N_i^m(u) N_j^n(v)}. \quad (6)$$

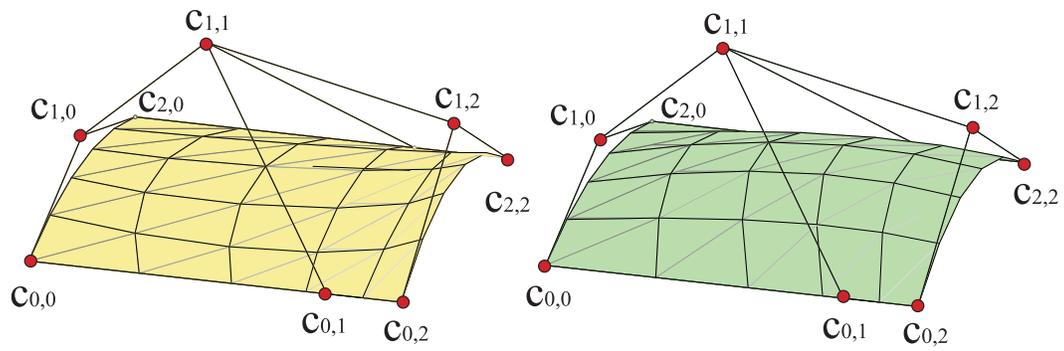


Figura 6: Al pasar el peso $w_{1,1}$ de uno a tres, la superficie se acerca al vértice $c_{1,1}$