

### 3. Propiedades de las superficies de Bézier

Como las superficies de Bézier son una generalización natural de las curvas polinómicas, muchas de las propiedades de estas se mantienen. En particular, como

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) = \left( \sum_{i=0}^m B_i^m(u) \right) \left( \sum_{j=0}^n B_j^n(v) \right) = 1, \quad (7)$$

puesto que los polinomios de Bernstein forman partición de la unidad, nuestra base de funciones es también **partición de la unidad** y nuestra parametrización (1) es una combinación baricéntrica de los vértices de la malla de control.

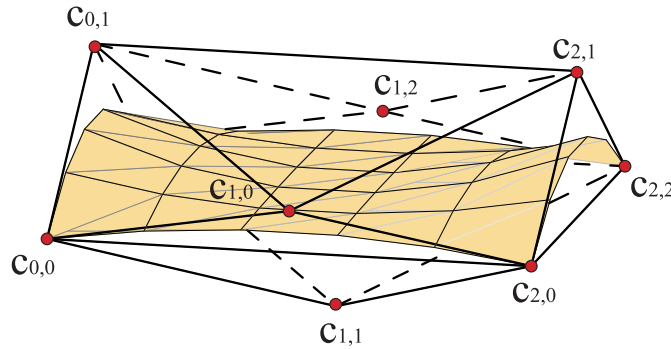


Figura 7: La superficie está contenida en la envolvente convexa de su malla de control

Este hecho traía consigo numerosas buenas propiedades, como la **invariancia afín** de la parametrización,

$$f(c(u, v)) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f(c_{i,j}) B_i^m(u) B_j^n(v), \quad u, v \in [0, 1], \quad (8)$$

para cualquier aplicación afín  $f$ . Aparte, las superficies racionales mantienen la invariancia proyectiva.

La superficie sigue estando comprendida, si los pesos son todos positivos, en la **envolvente convexa de la malla de control**, lo cual, recordemos, nos

proporciona una primera estimación de la posición de la superficie. [Ejemplo](#). En el caso de superficies a trozos, cada tramo de superficie está además comprendido en la envolvente convexa de su malla de control.

Sin embargo, no todo van a ser bondades, no hay una generalización sencilla de la propiedad de disminución de la variación. Es fácil, por ejemplo, comprobar que una recta puede cortar a la superficie en más puntos que los que corta al poliedro descrito por la malla de control.

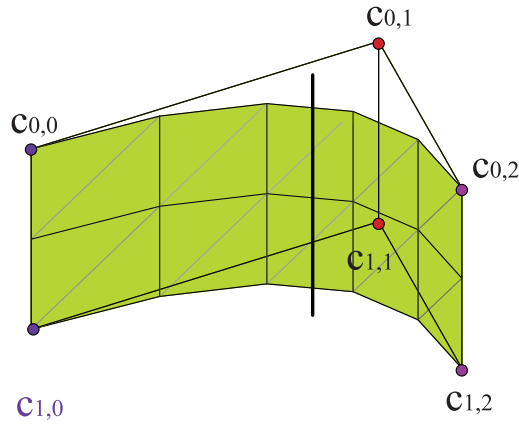


Figura 8: No hay disminución de la variación para superficies

Por supuesto, si queremos definir la parametrización en un recinto rectangular,  $[a, b] \times [c, d]$  distinto del que hemos empleado hasta el momento,  $[0, 1] \times [0, 1]$ , no precisamos más que realizar una reparametrización afín de los parámetros  $u, v$ , que no afecta ni a la malla de control ni a la gráfica de la superficie,

$$u(\tilde{u}) = \frac{\tilde{u} - a}{b - a}, \quad \tilde{u} \in [a, b], \quad v(\tilde{v}) = \frac{\tilde{v} - c}{d - c}, \quad \tilde{v} \in [c, d],$$

de modo que la nueva parametrización sea

$$\tilde{c}(\tilde{u}, \tilde{v}) = c(u(\tilde{u}), v(\tilde{v})) := c\left(\frac{\tilde{u} - a}{b - a}, \frac{\tilde{v} - c}{d - c}\right), \quad \tilde{u} \in [a, b], \quad \tilde{v} \in [c, d].$$

Del mismo modo que las curvas de Bézier sólo pasan por los vértices extremos, correspondientes a  $t = 0$ ,  $t = 1$ , las superficies sólo pasan por

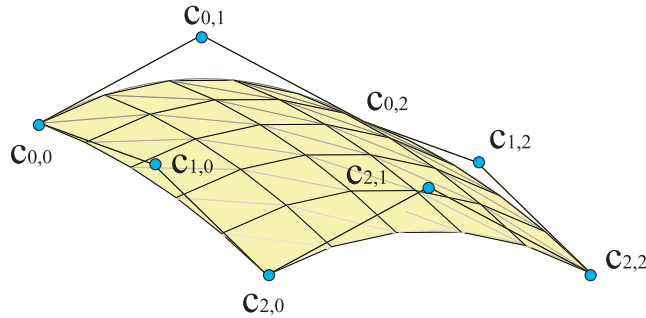


Figura 9: El borde de una superficie de Bézier está determinado por las filas y columnas primera y última de su malla de control

cuatro vértices, las esquinas de la malla de control,

$$c_{0,0} = c(0, 0), \quad c_{m,0} = c(1, 0), \quad c_{0,n} = c(0, 1), \quad c_{m,n} = c(1, 1),$$

aunque la superficie pasa por las cuatro curvas de Bézier que describen los bordes de la malla de control. **Ejemplo.** Por ejemplo, para  $u = 0$ , la curva correspondiente,  $c(0, v)$ , tiene por polígono de control  $\{c_{0,0}, \dots, c_{0,n}\}$ , la primera fila de la malla de control de la superficie. Del mismo modo, la última fila,  $\{c_{m,0}, \dots, c_{m,n}\}$ , es el polígono de control de la curva  $c(1, v)$ . Y, para  $v = 0$ , el polígono de control de la curva  $c(u, 0)$  es la primera columna de la malla de control,  $\{c_{0,0}, \dots, c_{m,0}\}$ . De manera análoga, el polígono de control de  $c(u, 1)$  es la última columna,  $\{c_{0,n}, \dots, c_{m,n}\}$ .

Por tanto, el borde de la malla se corresponde con el borde de la superficie. **Ejemplo.**

Esta propiedad se mantiene en las superficies racionales y en las superficies a trozos, si el nudo del comienzo y del final de cada sucesión tiene la multiplicidad igual al grado.

Las superficies a trozos siguen poseyendo la propiedad de control local. Un vértice genérico de la malla de control afecta a lo sumo a  $(m + 1) \cdot (n + 1)$  tramos de la superficie. En el ejemplo de la figura se ha desplazado el vértice  $c_{3,3}$  de una superficie de bigrado  $(2, 2)$  y  $5 \times 5$  tramos. **Ejemplo.**

La principal cortapisa de la representación producto tensorial son las limitaciones que impone a la topología de las superficies. Cuando se trata de superficies abiertas, no hay mayor problema. Pero cuando se trata de superficies cerradas, las únicas topologías permitidas son la del cilindro y la

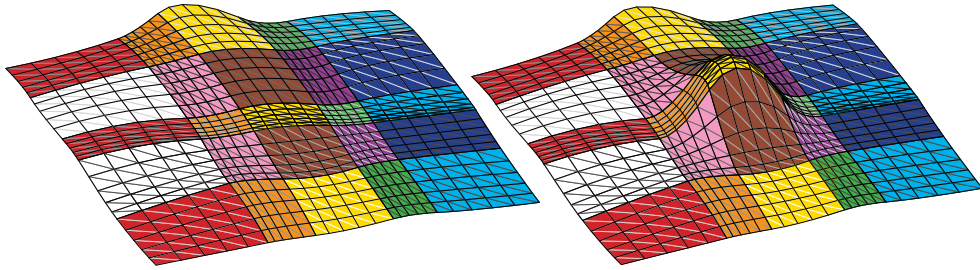


Figura 10: Control local de superficies B-spline: desplazar un vértice en una curva bicuadrática afecta a lo sumo a nueve tramos de superficie

del toro. Topologías más complicadas, como la de un doble o triple toro no se pueden representar. Incluso para representar la esfera es preciso recurrir a mallas degeneradas en las que los vértices se solapan, por ejemplo, en los polos de la esfera.

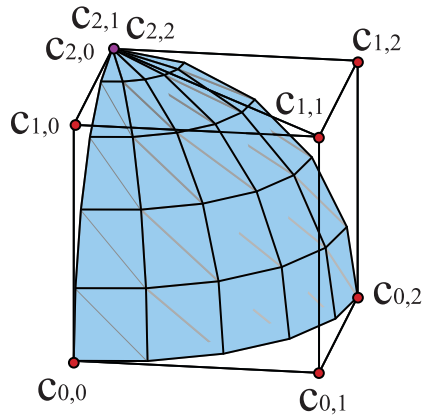


Figura 11: La esfera se representa por mallas degeneradas, con vértices múltiples